مذكرة التفوق

في الرياضيات البحتة

للصف الثاني الثانوي العلمي

الفصل الدراسي الأول

إعداد الأستاذ

السيد عبد الكريم عرابي

موجه رياضيات



أولاً : الجبر

(١) الدوال الحقيقية

(٢) الاسس

(٣) اللوغاريتمات

2 1 2

$$3x^2 - 2xy + c$$

3 4 3 4 5



الدوال الحقيقية

الدالة: هي علاقة بين مجموعتين س ، ص بحيث كل عنصر من عناصر المجموعة س يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة ص

* كتابة الدالة :- د : س ⟵ ص أو د(س) = ص

ملحوظة
س تسمى مجال الدالة
ص تسمى المجال المقابل
المدى هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

تدريب ١ أي العلاقات التالية يمثل دالة من س ⟵ ص

(١) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}: ١ ⟵ ٤ ، ٢ ⟵ ٥ ، ٢ ⟵ ٦ ، ٣ ⟵ ٧
(٢) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}: ١ ⟵ ٤ ، ٢ ⟵ ٥ ، ٢ ⟵ ٦ ، ٣ ⟵ ٧
(٣) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}: ٢ ⟵ ٤ ، ٣ ⟵ ٦
(٤) س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}: ١ ⟵ ٥ ، ٢ ⟵ ٥ ، ٣ ⟵ ٥

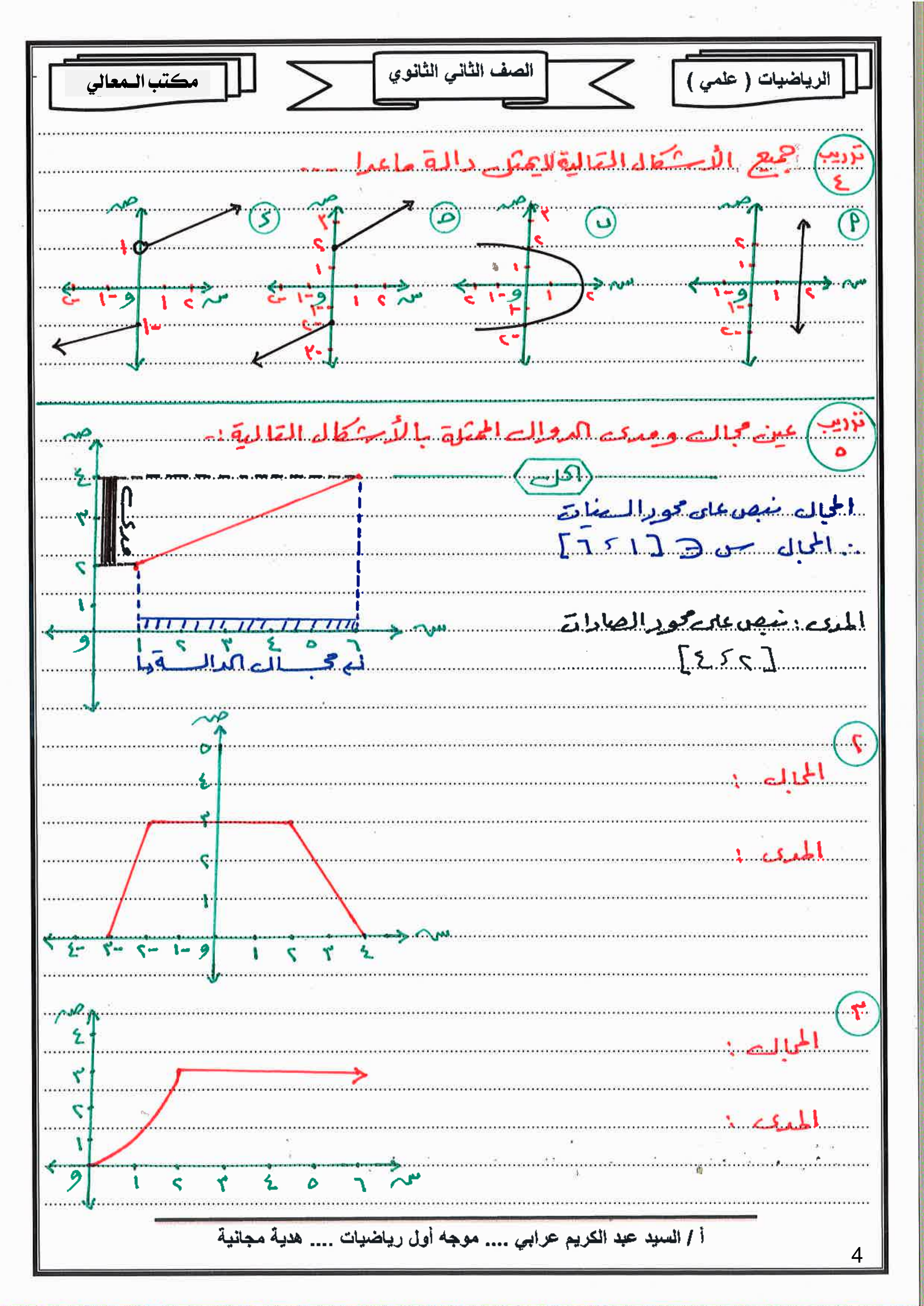
تدريب ٢ العلاقات المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي ...

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}
(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}
(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}
(د) {(-٣ ، ٥) ، (-١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

تدريب ٣ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة :

(أ) ص = ٣س + ١
(ب) ص = س٢ - ٤
(جـ) س = ص٢ - ٢
(د) ص = جا س

الرياضيات .. إسلوب حياه !



مكتب المعالي
الصف الثاني الثانوي
الرياضيات (علمي)
تدريب ٤
جميع الأشكال التالية لا يمثل دالة ماعدا ....
تدريب ٥
عين مجال ومدى الدوال الممثلة بالأشكال التالية :-
الحل
المجال ينحصر على محور السينات
∴ المجال س ∈ [١ ، ٦]
المدى : ينحصر على محور الصادات
[٢ ، ٤]
مجال الدالة
مدى
٢
المجال :
المدى :
٣
المجال :
المدى :
أ / السيد عبد الكريم عرابي .... موجه أول رياضيات .... هدية مجانية
4

العمليات على الدوال

تعيين مجال الدالة

١) الدوال كثيرة الحدود

* مجال أي دالة كثيرة حدود هو ح

١) د(س) = ٤ ثابتة

٢) د(س) = س + ٥ خطية

٣) د(س) = س^{٢} + ١ تربيعية

٤) د(س) = س^{٣} + ٤ تكعيبية

٢) الدوال الجذرية

د(س) = $\sqrt[ن]{ر(س)}$ حيث ن ∈ ص$^{+}$، ن > ١

ر(س) دالة كثيرة حدود

١) إذا كانت ن عدد فردي ∴ مجالها ح

٢) إذا كانت ن عدد زوجي ∴ نضع ر(س) ≥ ٠ ونوجد قيم س

٣) الدالة الكسرية

د(س) = $\frac{ر(س)}{ق(س)}$ حيث ر، ق كثيرتي حدود

مجالها ح − {أصفار المقام}

تدريب ١: عيّن مجال الدوال التالية:

١) د(س) = $\sqrt{س}$

نضع س ≥ ٠ ∴ المجال [٠، ∞[

٢) د(س) = $\sqrt{س - ٢}$

نضع س − ٢ ≥ ٠

س ≥ ٢ ∴ المجال [٢، ∞[

٣) د(س) = $\sqrt{٣ - س}$

نضع ٣ − س ≥ ٠

٣ ≥ س ∴ المجال]−∞، ٣]

٤) د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

نضع س^{٢} − ٤ ≥ ٠ متباينة درجة ثانية

نبحث إشارة المقدار د(س) = س^{٢} − ٤

جذرى المعادلة هما −٢، ٢

مثل	عكس	مثل
موجب	سالب	موجب
]−∞، −٢]	]−٢، ٢[	[٢، ∞[

(−∞ ... −٢ ... ٢ ... ∞)

المجال هو قيم س التي تجعل المقدار موجباً وصفر

∴ المجال ح −]−٢، ٢[

٥) د(س) = $\sqrt[3]{س + ٥}$

∵ دليل الجذر ③ فردي

∴ مجال الدالة هو ح

---

٦) د(س) = $\frac{س + ٥}{س}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٠

∴ المجال هو ح − {٠}

---

٧) د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٤

∴ المجال هو ح − {٤}

---

٨) د(س) = $\frac{س + ٧}{س^٢ - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام : س^٢ − ٤ = ٠

س = −٢ ، س = ٢

∴ المجال هو ح − {−٢ ، ٢}

---

٩) د(س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ + ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام : س^٢ + ٤ = ٠

∴ لا يوجد أصفار للمقام

∴ مجال الدالة ح

---

* إذا كانت د ، ر دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن :

١) (د ± ر)(س) = د(س) ± ر(س)

٢) (د . ر)(س) = د(س) × ر(س)

تكونان دوال حقيقية مجالها م١ ∩ م٢

٣) $(\frac{د}{ر})$(س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ ٠

مجالها م١ ∩ م٢ − {أصفار المقام}

تدريب ٢ : عين مجال الدوال التالية

١) د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ + ٧

لاحظ د(س) عبارة عن مجموع دالتين

د١(س) = $\sqrt{س - ٢}$ مجالها م١ = [٢ ، ∞[

د٢(س) = ٧ مجالها م٢ = ح

∴ مجال د(س) هو م١ ∩ م٢

= [٢ ، ∞[∩ ح

= [٢ ، ∞[

---

٢) د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ + $\sqrt{٣ - س}$

نضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ م١ = [−٣ ، ∞[

نضع ٣ − س ≥ ٠ ∴ م٢ =]−∞ ، ٣]

∴ المجال م١ ∩ م٢ = [−٣ ، ٣]

(خط الأعداد: −∞ ، −٣ ، ٣ ، ∞)

③ $د(س) = \dfrac{س + 2}{\sqrt{س + 5}}$

لاحظ د(س) ليست دالة كسرية ولكنها عملية قسمة دالتين

مجال البسط $م_1 = ح$

مجال المقام $م_2 = [-5 ، \infty[$

أصفار المقام $\{-5\}$

∴ مجال الدالة: $ح \cap [-5 ، \infty[- \{-5\}$

$= \,]-5 ، \infty[$

---

④ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س + 1}}{\sqrt{س - 3}}$

مجال البسط $م_1 = [-1 ، \infty[$

مجال المقام $م_2 = [3 ، \infty[$

أصفار المقام $\{3\}$

∴ مجال الدالة هو: $[-1 ، \infty[\cap [3 ، \infty[- \{3\}$

$= \,]3 ، \infty[$

---

⑤ إذا كانت: $د : [-5 ، 3] \longrightarrow ح$

$د(س) = س^2 + 7$

$ر : [-1 ، 7] \longrightarrow ح$

حيث $ر(س) = س^2 - 4$

أوجد $(\frac{د}{ر})(س)$ وعين المجال

لاحظ: $م_1 = [-5 ، 3]$

$م_2 = [-1 ، 7]$

∴ $(\frac{د}{ر})(س) = \dfrac{س^2 + 7}{س^2 - 4}$

مجالها: $م_1 \cap م_2 - \{-2 ، 2\}$

$= [-1 ، 3] - \{-2 ، 2\}$

تدريب للطلبة

① مجال الدالة $د(س) = س + 3$ هو:

(أ) $\{-3\}$ (ب) $ح - \{-3\}$

(ج) $]-3 ، \infty[$ (د) $ح$

② مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س + 3}$ هو

(أ) $\{-3\}$ (ب) $ح - \{-3\}$

(ج) $]-3 ، \infty[$ (د) $ح$

③ مجال الدالة $د(س) = \sqrt[3]{س + 3}$ هو

(أ) $\{-3\}$ (ب) $ح - \{-3\}$

(ج) $]-3 ، \infty[$ (د) $ح$

④ مجال الدالة: $د(س) = \sqrt{س - 4} + 7$ هو

(أ) $ح$ (ب) $[4 ، \infty[$

(ج) $]4 ، \infty[$ (د) $]-\infty ، 4]$

⑤ مجال الدالة $د(س) = \dfrac{\sqrt{س - 2}}{س - 5}$ هو

(أ) $ح - \{5\}$ (ب) $[2 ، \infty[$

(ج) $[2 ، \infty[- \{5\}$ (د) $]2 ، \infty[- \{5\}$

تركيب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها (د ∘ ر) أي (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

خطوات تعيين المجال

1. نوجد مجال ر .... م₁
2. نوجد مجال الدالة بعد التركيب .... م₂
3. المجال المطلوب : .... م₁ ∩ م₂

ملحوظة: شرط تركيب (د ∘ ر) أن يكون مدى الدالة ر ∩ مجال الدالة د ≠ ∅

تدريب 1: إذا كانت : د(س) = 2س + 1 ، ر(س) = س² − 3 أوجد

(1) (د ∘ ر)(س) (2) (ر ∘ د)(س)

الحل

(1) (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)]
= د(س² − 3)
نروح للدالة د ونعوض عن س ب (س² − 3)
= 2(س² − 3) + 1
∴ (د ∘ ر)(س) = 2س² − 5

(2) (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))
= ر(2س + 1)
= (2س + 1)² − 3
∴ (ر ∘ د)(س) = 4س² + 4س − 2

تدريب 2: إذا كانت د(س) = س² + 6 ، ر(س) = 3 س أوجد :

(1) (د ∘ ر)(3)
(1) قيم س التي تجعل (د ∘ ر)(س) = 42

الحل

(1) (د ∘ ر)(3) = د(ر(3))
نوجد ر(3) = 3 × 3 = 9
∴ (د ∘ ر)(3) = د(9)
نوجد د(9) = (9)² + 6 = 87
∴ (د ∘ ر)(3) = 87

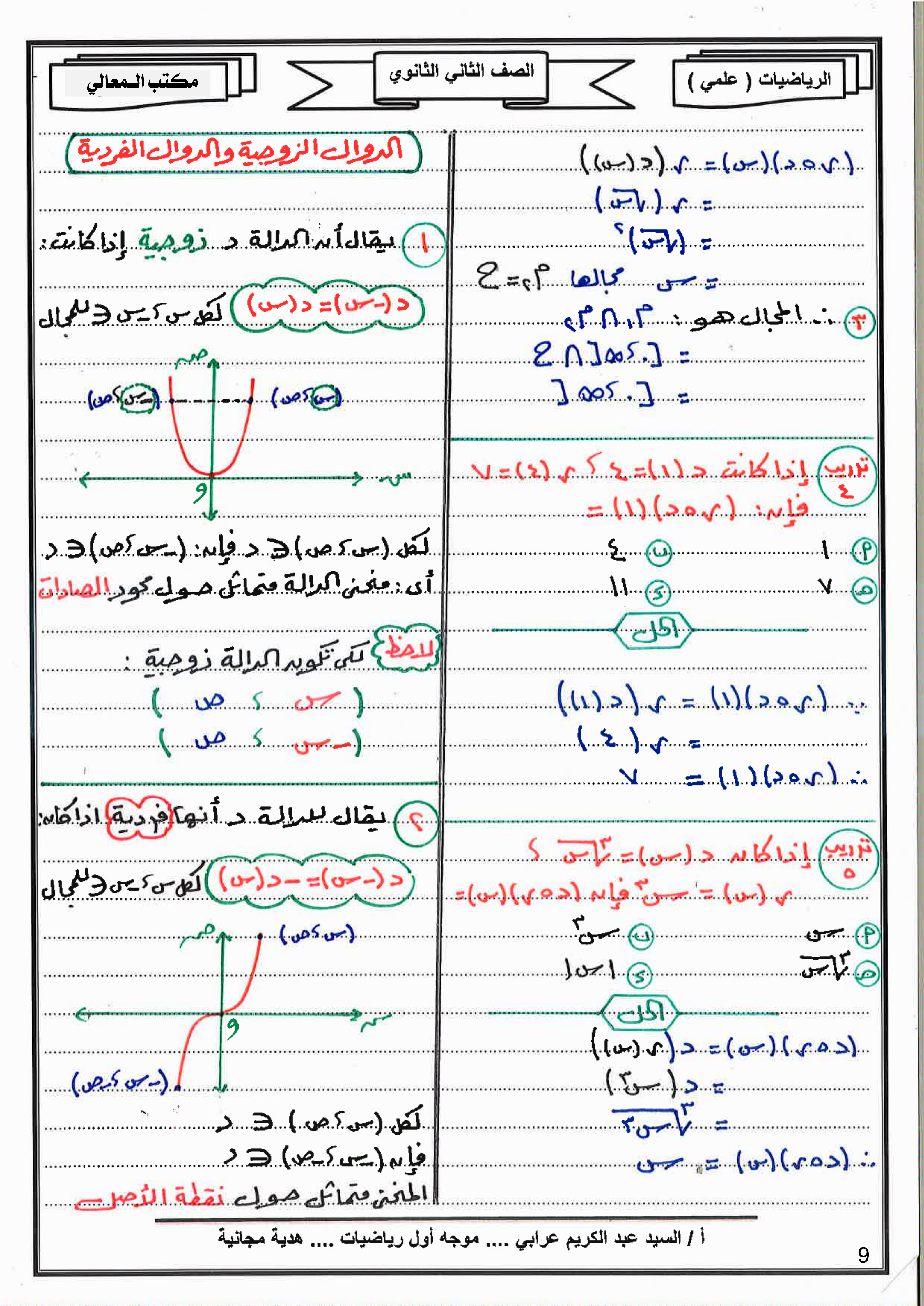
(2) ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))
= د(3س)
∴ (د ∘ ر)(س) = 9س² + 6
∴ 42 = 9س² + 6
∴ س² = 4 ⟸ س = ±2

تدريب 3: إذا كانت : د(س) = √س ، ر(س) = س² فإن : مجال (ر ∘ د) =

(أ)]−∞ ، 0] (ب) [0 ، ∞[
(ج) ح⁺ (د) ح

الحل

1. نوجد مجال د .... م₁ = [0 ، ∞[
2. نوجد (ر ∘ د)(س)



$(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{س})$

$= (\sqrt{س})^2$

$= س$ مجالها $ح = م_2$

٣) $\therefore$ المجال هو: $م_1 \cap م_2$

$= [٠ ، \infty[\cap ح$

$= [٠ ، \infty[$

تدريب ٤ إذا كانت $د(١) = ٤$ ، $ر(٤) = ٧$ فإن: $(ر \circ د)(١) =$

(أ) ١ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ١١

الحل

$\because (ر \circ د)(١) = ر(د(١))$

$= ر(٤)$

$\therefore (ر \circ د)(١) = ٧$

تدريب ٥ إذا كانت $د(س) = \sqrt[3]{س}$ ، $ر(س) = س^3$ فإن $(د \circ ر)(س) =$

(أ) س (ب) $س^3$ (ج) $\sqrt[3]{س}$ (د) ١

الحل

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(س^3)$

$= \sqrt[3]{س^3}$

$\therefore (د \circ ر)(س) = س$

الدوال الزوجية والدوال الفردية

١) يقال أن الدالة د **زوجية** إذا كانت: $د(-س) = د(س)$ لكل س ، −س ∈ للمجال

لكل (س ، ص) ∈ د فإن: (−س ، ص) ∈ د

أى: منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

لاحظ لكى تكون الدالة زوجية:

(س ، ص)

(−س ، ص)

٢) يقال للدالة د أنها **فردية** إذا كانت: $د(-س) = -د(س)$ لكل س ، −س ∈ للمجال

لكل (س ، ص) ∈ د

فإن (−س ، −ص) ∈ د

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

ملاحظات

1) عند بحث نوع الدالة لازم يكون لعددين س ، -س ∈ مجال الدالة بمعنى يكون المجال
ح أو [-م ، م] أو]-م ، م[

2) إذا كان: د(-س) ≠ د(س) ≠ -د(س)
فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية

3) من خواص الدوال المثلثية سابقاً:
* حا(-س) = -حاس ..... فردية
* حتا(-س) = حتاس ..... زوجية
* ظا(-س) = -ظاس ..... فردية

تدريب 1: ابحث نوع كل من الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

1) د(س) = س² + حتاس
د(-س) = (-س)² + حتا(-س)
د(-س) = س² + حتاس
∴ د(-س) = د(س) ..... زوجية

2) د(س) = س³ - حاس
د(-س) = (-س)³ - حا(-س)
د(-س) = -س³ + حاس
∴ د(-س) = -د(س) ..... فردية

3) د(س) = س³ + س² + ظاس
د(-س) = (-س)³ + (-س)² + ظا(-س)
= -س³ + س² - ظاس
∴ د(-س) ≠ د(س) ≠ -د(س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

4) د(س) = س² حتاس
د(-س) = (-س)² × حتا(-س)
د(-س) = س² حتاس ..... زوجية

5) د(س) = س حتاس
د(-س) = (-س) × حتا(-س)
= -س حتاس
∴ د(-س) = -د(س) ..... فردية

6) د(س) = حتاس / (س² + ٧)
د(-س) = حتا(-س) / ((-س)² + ٧)
د(-س) = حتاس / (س² + ٧) ..... زوجية

7) د(س) = √(س - ٣)
∴ مجال الدالة [٣ ، ∞[
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



٨) إذا كانت د : [-٣، ٤] ⟵ ح حيث
د(س) = س^٢ + ٥

∵ المجال هو [-٣، ٤]
∵ -٤ ∉ للمجال
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

خواص هامة

إذا كان: $د_1$ ، $د_2$ دالة **زوجية**
، $ر_1$ ، $ر_2$ دالة **فردية**

١) $د_1 \pm د_2$ تكون زوجية
٢) $ر_1 \pm ر_2$ تكون فردية
٣) $د_1 \pm ر_1$ ليست زوجية وليست فردية
٤) $(د_1 \times د_2)$ ، $\frac{د_1}{د_2}$ تكون زوجية
٥) $(ر_1 \times ر_2)$ ، $\frac{ر_1}{ر_2}$ تكون زوجية
٦) $(د_1 \times ر_1)$ ، $\frac{د_1}{ر_1}$ تكون فردية

الخلاصة

١) زوجية ± زوجية = زوجية
٢) فردية ± فردية = فردية
٣) زوجية ×÷ زوجية = زوجية
٤) فردية ×÷ فردية = زوجية
٥) زوجية ×÷ فردية = فردية

تدريب للطلبة

١) الدالة الزوجية من بين الدوال التالية هي ...
(أ) د(س) = س^٣ (ب) د(س) = جا س
(ج) د(س) = س جتا س (د) د(س) = س جا س

٢) الدالة الفردية من بين الدوال التالية هي
(أ) د(س) = س^٢ جا س (ب) د(س) = ظا^٢ س
(ج) د(س) = جتا س (د) د(س) = ١

٣) إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [أ، ب] فإن ب = ...
(أ) أ (ب) -أ
(ج) ٢أ (د) ٣أ

٤) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د
فإن: د(٢) + د(-٢) = ...
(أ) صفر (ب) ٤
(ج) ٢ (د) ٢د(٢)

٥) نوع الدالة د(س) = $\frac{جا س}{س}$ هو
(أ) زوجية (ب) فردية
(ج) لا زوجية ولا فردية (د) زوجية وفردية

الرياضيات ...
فكر - فهم - تطبيق

الدالة الأحادية

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية

إذا كان لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)

فإن : أ = ب

أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب

فإن : د(أ) ≠ د(ب)

* خطوات الدالة الأحادية

1. نوجد : د(أ) ، د(ب)
2. نضع : د(أ) = د(ب)
3. نختصر : بعد الاختصار إذا كان :

أ = ب تكون أحادية

أ ≠ ب تكون ليست أحادية

* بيانياً : باستخدام الخط الأفقي

تدريب 1 : بين أي الدوال التالية أحادية وأيها ليست أحادية.

(1) د(س) = ٢س − ٣

1. د(أ) = ٢أ − ٣ ، د(ب) = ٢ب − ٣
2. نضع : ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣
3. نختصر : ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب دالة أحادية

(2) د(س) = $\text{س}^2 + 1$

1. نوجد : د(أ) = $\text{أ}^2 + 1$ ، د(ب) = $\text{ب}^2 + 1$
2. نضع : $\text{أ}^2 + 1 = \text{ب}^2 + 1$
3. نختصر : $\text{أ}^2 = \text{ب}^2$

∴ أ = ± ب ليست أحادية

(3) د(س) = $\frac{1}{\text{س}+3}$

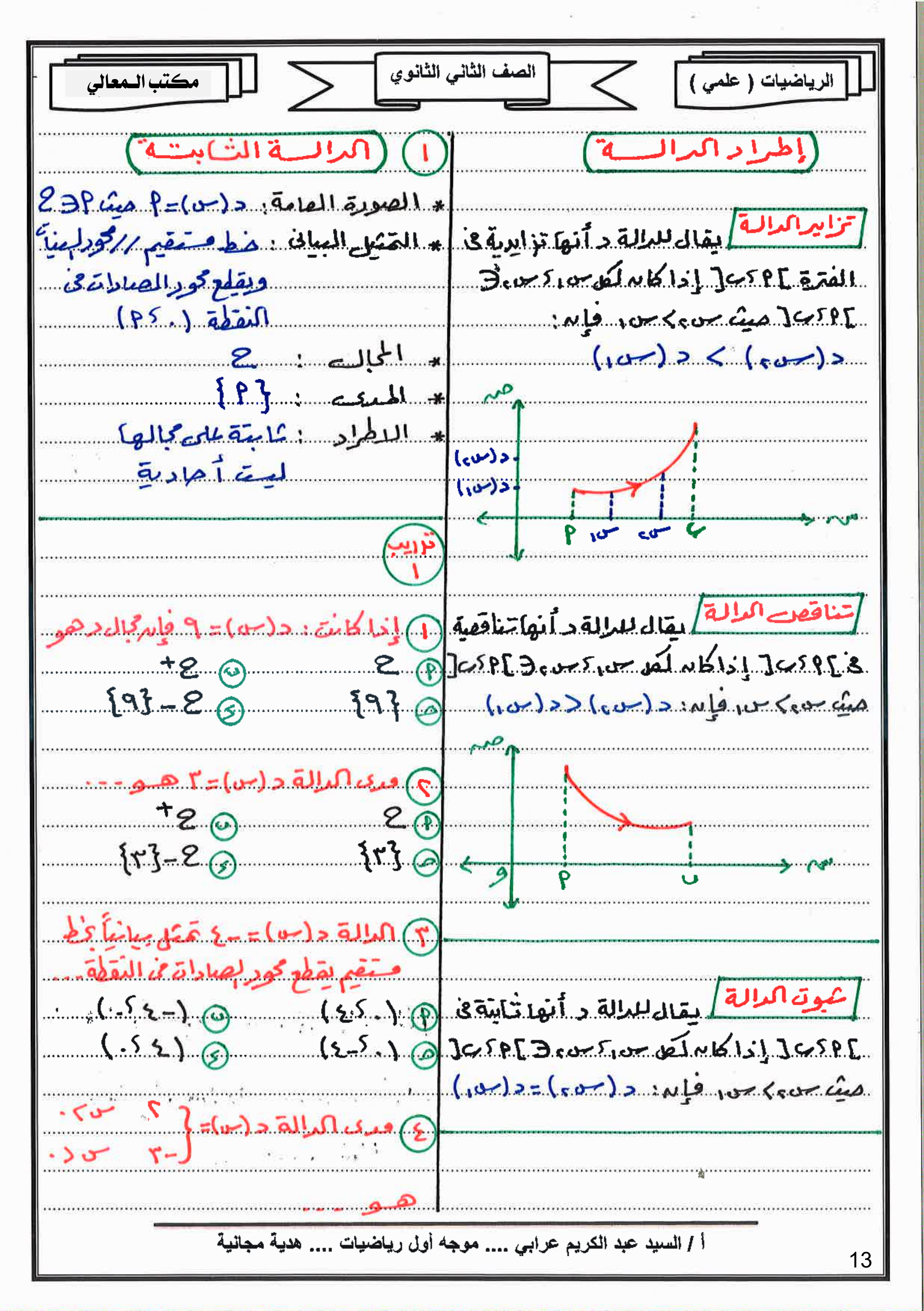
1. نوجد : د(أ) = $\frac{1}{\text{أ}+3}$ ، د(ب) = $\frac{1}{\text{ب}+3}$
2. نضع : $\frac{1}{\text{أ}+3} = \frac{1}{\text{ب}+3}$
3. نختصر : أ + ٣ = ب + ٣

أ = ب أحادية

اللهم إن كان من توفيق فمن الله

وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان ...

المعالي
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠



إطراد الدالة

تزايد الدالة

يقال للدالة د أنها تزايدية في الفترة]أ، ب[إذا كان لكل س١، س٢ ∈]أ، ب[حيث س٢ > س١ فإن:

د(س٢) > د(س١)

تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها تناقصية في]أ، ب[إذا كان لكل س١، س٢ ∈]أ، ب[حيث س٢ > س١ فإن: د(س٢) < د(س١)

ثبوت الدالة

يقال للدالة د أنها ثابتة في]أ، ب[إذا كان لكل س١، س٢ ∈]أ، ب[حيث س٢ > س١ فإن: د(س٢) = د(س١)

① الدالة الثابتة

* الصورة العامة: د(س) = أ حيث أ ∈ ح
* التمثيل البياني: خط مستقيم // محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠، أ)
* المجال: ح
* المدى: {أ}
* الاطراد: ثابتة على مجالها ليست أحادية

تدريب ١

١) إذا كانت: د(س) = ٩ فإن مجال د هو

(أ) ح (ب) ح⁺
(ج) {٩} (د) ح − {٩}

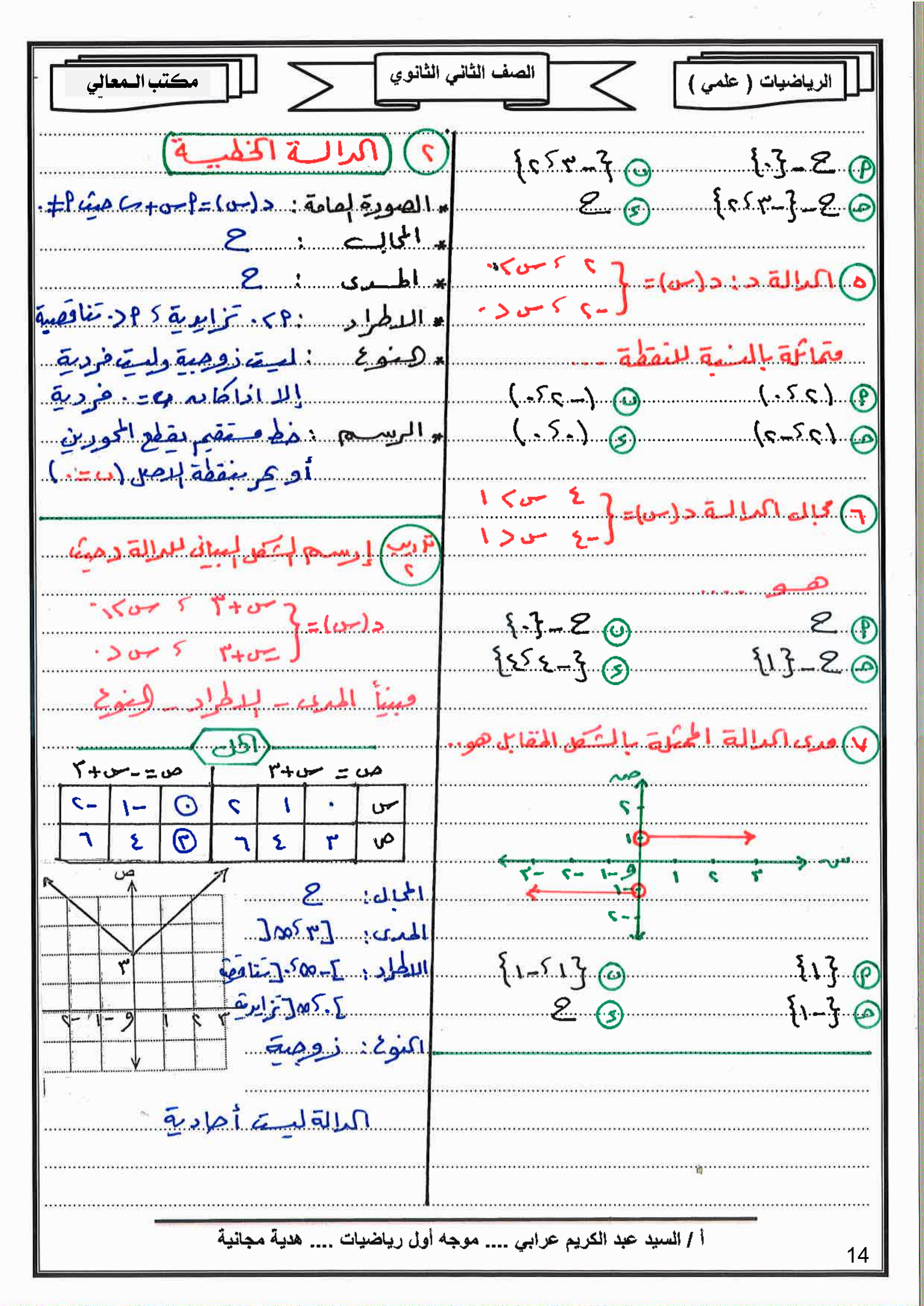
٢) مدى الدالة د(س) = ٣ هو ...

(أ) ح (ب) ح⁺
(ج) {٣} (د) ح − {٣}

٣) الدالة د(س) = −٤ تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ...

(أ) (٠، ٤) (ب) (−٤، ٠)
(ج) (٠، −٤) (د) (٤، ٠)

٤) مدى الدالة د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٣ ، س < ٠ } هو ...



أ) ح - {٠} ب) {-٣ ، ٢}

جـ) ح - {-٣ ، ٢} د) ح

٥) الدالة د : د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ -٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

أ) (٢ ، ٠) ب) (-٢ ، ٠)

جـ) (٢ ، -٢) د) (٠ ، ٠)

٦) مجال الدالة د(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ -٤ ، س < ١ } هو ......

أ) ح ب) ح - {٠}

جـ) ح - {١} د) {-٤ ، ٤}

٧) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ...

أ) {١} ب) {١ ، -١}

جـ) {-١} د) ح

٢) الدالة الخطية

* الصورة العامة : د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠
* المجال : ح
* المدى : ح
* الاطراد : أ > ٠ تزايدية ، أ < ٠ تناقصية
* النوع : ليست زوجية وليست فردية إلا اذا كانت ب = ٠ . فردية
* الرسم : خط مستقيم يقطع المحورين أو يمر بنقطة الأصل (ب = ٠)

تدريب ٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث

د(س) = { س + ٣ ، س ≥ ٠ ؛ -س + ٣ ، س < ٠ }

ومنها المدى - الاطراد - النوع

الحل

ص = -س + ٣ | ص = س + ٣

-٢	-١	٠	٢	١	٠	س
٦	٤	٣	٦	٤	٣	ص

المجال : ح

المدى : [٣ ، ∞[

الاطراد :]-∞ ، ٠[تناقصية

[٠ ، ∞[تزايدية

النوع : زوجية

الدالة ليست أحادية

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

تعريف: القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س (تسمى مقياس العدد) ويرمز له |س| ومعناه أكبر العددين س ، –س

$$|س| = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

خواص مقياس العدد الحقيقي

١) $|س| \geq ٠$

٢) $|س| = |-س|$

٣) $|أ - س| = |س - أ|$

٤) إذا كان: $|س| = أ$ حيث $أ > ٠$ ، فإن $س = \pm أ$

٥) إذا كان: $|س| = |أ|$ فإن: $س = \pm أ$

٦) $\sqrt{س^٢} = |س|$ لأي عدد حقيقي س

٧) $|س|^٢ = س^٢$ لأي عدد حقيقي س

٨) $|س ص| = |س| \times |ص|$

٩) $|س + ص| \leq |س| + |ص|$



إعادة تعريف المقياس

1) نرتب ما داخل المقياس ونجعلها موجبة
2) نوجد صفر المقياس [نجعل ما بداخل المقياس = ٠]
3) نصير ترتيب المقياس على فترتين : |دالة| =
   - + (دالة) ∀ س ≥ صفر المقياس
   - − (دالة) ∀ س < صفر المقياس

حل معادلة المقياس

حل جبري

باستخدام إعادة تعريف المقياس أو بوجود طرق أخرى

حل بياني

نرسم دالة الطرف الأيمن ونرسم دالة الطرف الأيسر ونحدد التقاطع نوجد الإحداثي السيني لها

تدريب 1: أوجد مجموعة الحل في ح

1) |٢س − ١| = ٥

الحل

س ≥ ١/٢	س < ١/٢
٢س − ١ = ٥	−٢س + ١ = ٥
٢س = ٦	−٢س = ٤
س = ٣	س = −٢

م.ح = {٣ ، −٢}

2) |٢س − ٣| = ٧

الحل

س ≥ ٣/٢	س < ٣/٢
٢س − ٣ = ٧	−٢س + ٣ = ٧
٢س = ١٠	−٢س = ٤
س = ٥	س = −٢

م.ح = {٥ ، −٢}

3) |س − ٢| + ٢س = ٧

الحل

س ≥ ٢	س < ٢
س − ٢ + ٢س = ٧	−س + ٢ + ٢س = ٧
٣س = ٩	س = ٥
س = ٣	∵ س = ٥ ≮ ٢

∴ م.ح = {٣}

ملحوظة: إذا كان |أ س + ب| = جـ حيث جـ ∈ ح⁻ فإن م.ح = ∅

④ |س − ٣| + ٥ = ٠

الحل

|س − ٣| = −٥ ∈ ح⁻

∴ م.ح = ∅

⑤ |س − ٢| = |س − ٦|

الحل

س + ٢ = س − ٦ ، س + ٢ = −س + ٦

٢ = −٦ مرفوض ، ٢س = ٤

س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ √(س² − ٢س + ١) = ٤

الحل

√((س − ١)²) = ٤

|س − ١| = ٤

س ≥ ١ ، س < ١

س − ١ = ٤ ، −س + ١ = ٤

س = ٥ ، س = −٣

م.ح = {٥ ، −٣}

تدريب ٢: اختر الإجابة الصحيحة

① مجموعة حل المعادلة: |س − ٢| = ٥ في ح هي

(أ) {٧} (ب) {−٣}
(جـ) {٧ ، −٣} (د) [٧ ، −٣]

② مجموعة حل المعادلة |٥س − ١| + ٤ = ١ في ح هي

(أ) {−٤/٥ ، ٦/٥} (ب) ∅
(جـ) {٦/٥} (د) {−٤/٥}

③ مجموعة حل المعادلة: |س| + س = ٠ هي

(أ) {٠} (ب)]−∞ ، ٠]
(جـ)]−∞ ، ٠[(د) ∅

④ مجموعة حل المعادلة |٢س − ٤| = |س + ١| هي

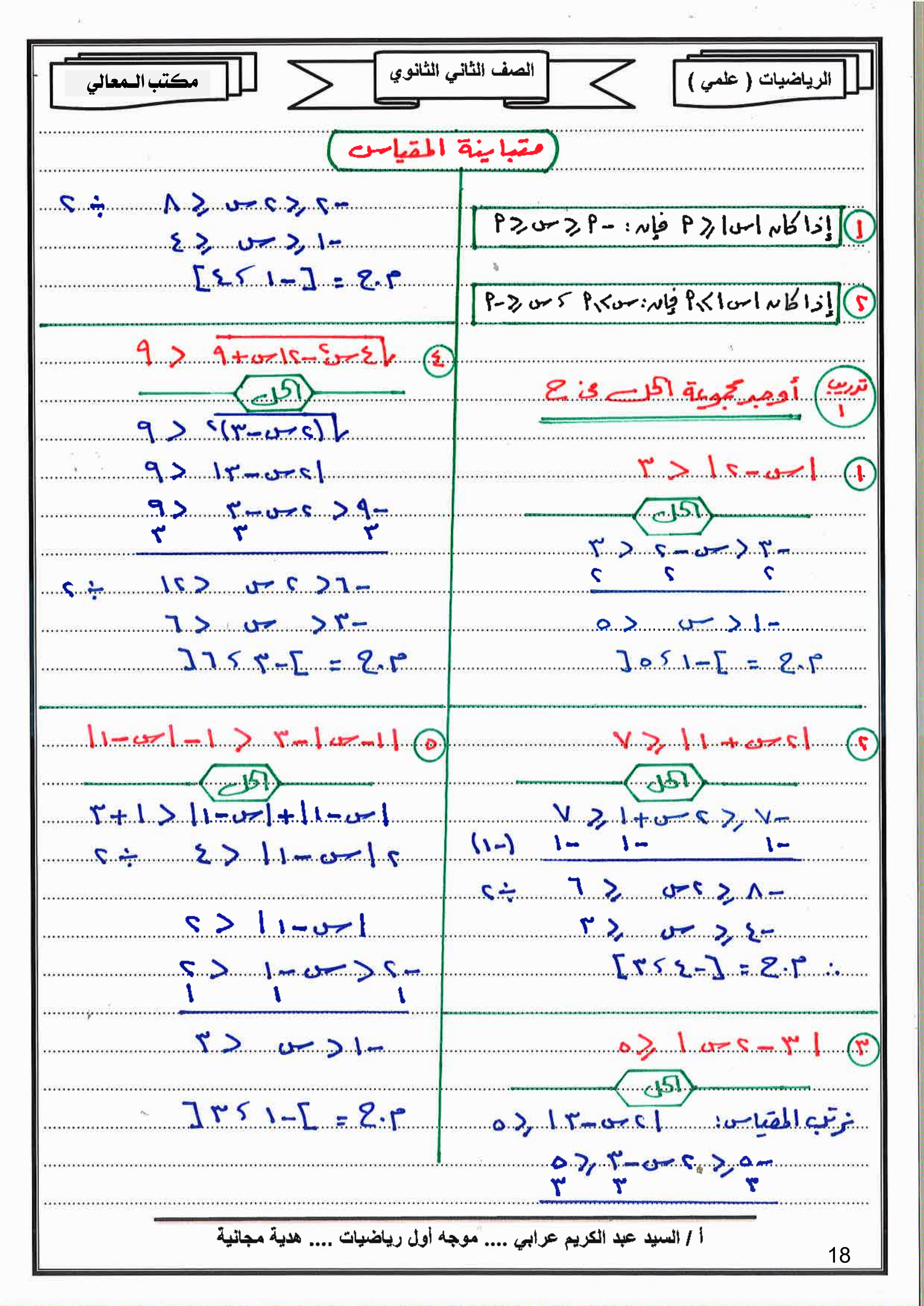
(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١}
(جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

⑤ مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٥| = ٧ في ح هي

(أ) {١ ، −٦} (ب) {٦}
(جـ) {١} (د) {−١}

⑥ العبارة الخطأ فيما يلي هي

(أ) |س ص| = |س| × |ص| (ب) |−س| = |س|
(جـ) |س + ص| = |س| + |ص| (د) √(س²) = |س|



متباينة المقياس

١) إذا كان |س| ≤ أ فإن: −أ ≤ س ≤ أ

٢) إذا كان |س| ≥ أ فإن: س ≥ أ أو س ≤ −أ

تدريب ١: أوجد مجموعة الحل في ح

١) |س − ٢| < ٣

الحل

−٣ < س − ٢ < ٣ (+٢)

−١ < س < ٥

م.ح =]−١، ٥[

٢) |٢س + ١| ≤ ٧

الحل

−٧ ≤ ٢س + ١ ≤ ٧ (−١)

−٨ ≤ ٢س ≤ ٦ ÷ ٢

−٤ ≤ س ≤ ٣

∴ م.ح = [−٤، ٣]

٣) |٣ − ٢س| ≤ ٥

الحل

نرتب المقياس: |٢س − ٣| ≤ ٥

−٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥ (+٣)

−٢ ≤ ٢س ≤ ٨ ÷ ٢

−١ ≤ س ≤ ٤

م.ح = [−١، ٤]

٤) √(٤س² − ١٢س + ٩) < ٩

الحل

√((٢س − ٣)²) < ٩

|٢س − ٣| < ٩

−٩ < ٢س − ٣ < ٩ (+٣)

−٦ < ٢س < ١٢ ÷ ٢

−٣ < س < ٦

م.ح =]−٣، ٦[

٥) |١ − س| − ٣ < ١ − |س − ١|

الحل

|س − ١| + |س − ١| < ١ + ٣

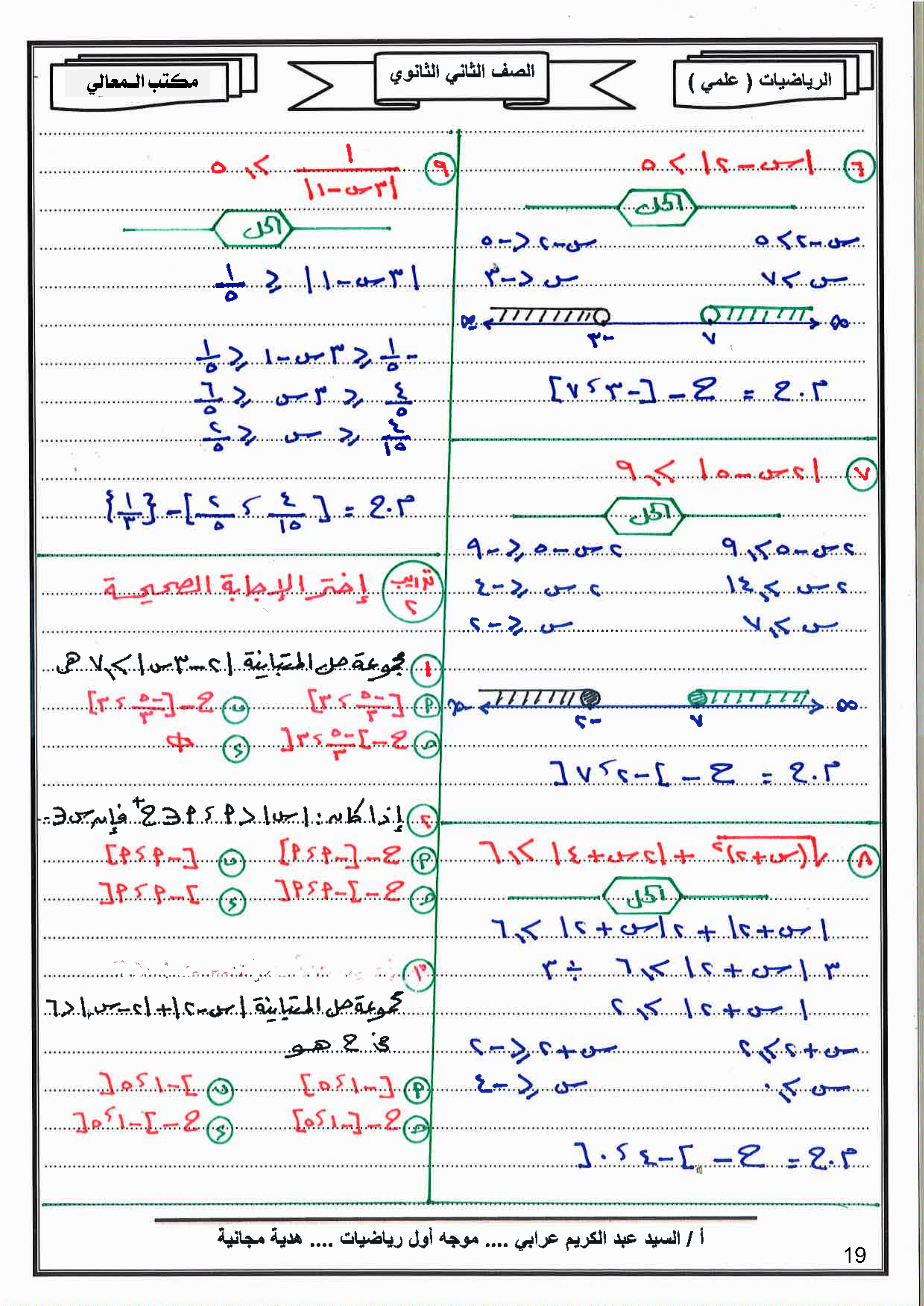
٢|س − ١| < ٤ ÷ ٢

|س − ١| < ٢

−٢ < س − ١ < ٢ (+١)

−١ < س < ٣

م.ح =]−١، ٣[



⑥ $|س - ٢| > ٥$

الحل

$س - ٢ > ٥$ ، $س - ٢ < -٥$

$س > ٧$ ، $س < -٣$

م.ح $= ح - [-٣ ، ٧]$

⑦ $|٢س - ٥| \geq ٩$

الحل

$٢س - ٥ \geq ٩$ ، $٢س - ٥ \leq -٩$

$٢س \geq ١٤$ ، $٢س \leq -٤$

$س \geq ٧$ ، $س \leq -٢$

م.ح $= ح -]-٢ ، ٧[$

⑧ $\sqrt{(س+٢)^2} + |٢س + ٤| \geq ٦$

الحل

$|س + ٢| + ٢|س + ٢| \geq ٦$

$٣|س + ٢| \geq ٦$ ÷ ٣

$|س + ٢| \geq ٢$

$س + ٢ \geq ٢$ ، $س + ٢ \leq -٢$

$س \geq ٠$ ، $س \leq -٤$

م.ح $= ح -]-٤ ، ٠[$

⑨ $\frac{١}{|٣س - ١|} \geq ٥$

الحل

$|٣س - ١| \leq \frac{١}{٥}$

$-\frac{١}{٥} \leq ٣س - ١ \leq \frac{١}{٥}$

$\frac{٤}{٥} \leq ٣س \leq \frac{٦}{٥}$

$\frac{٤}{١٥} \leq س \leq \frac{٢}{٥}$

م.ح $= [\frac{٤}{١٥} ، \frac{٢}{٥}] - \{\frac{١}{٣}\}$

تدريب ٢ — إختر الإجابة الصحيحة

١) مجموعة حل المتباينة $|٢ - ٣س| \geq ٧$ هي

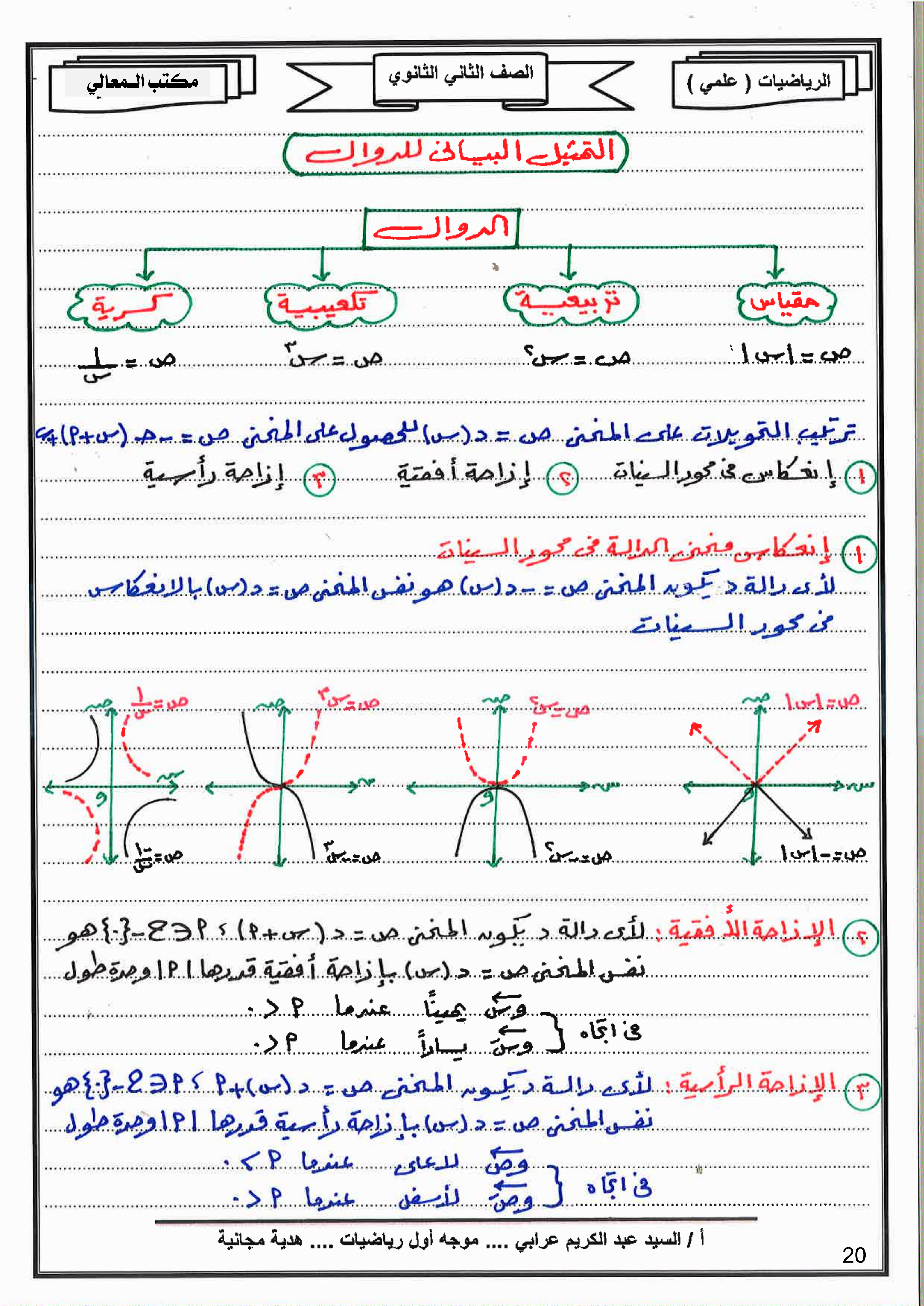
(أ) $[-\frac{٥}{٣} ، ٣]$ (ب) $ح - [-\frac{٥}{٣} ، ٣]$ (ج) $ح -]-\frac{٥}{٣} ، ٣[$ (د) ϕ

٢) إذا كانت: $|س| \leq أ$ ، $أ \in ح^+$ فإن س ∈

(أ) $ح - [-أ ، أ]$ (ب) $[-أ ، أ]$ (ج) $ح -]-أ ، أ[$ (د) $]-أ ، أ[$

٣) مجموعة حل المتباينة $|س - ٢| + |٢ - س| < ٦$ في ح هو

(أ) $[-١ ، ٥]$ (ب) $]-١ ، ٥[$ (ج) $ح - [-١ ، ٥]$ (د) $ح -]-١ ، ٥[$



التمثيل البياني للدوال

الدوال

مقياس	تربيعية	تكعيبية	كسرية
$ص = \|س\|$	$ص = س^2$	$ص = س^3$	$ص = \frac{1}{س}$

ترتيب التحويلات على المنحنى $ص = د(س)$ للحصول على المنحنى $ص = -د(س + أ) + ب$

١) إنعكاس في محور السينات ٢) إزاحة أفقية ٣) إزاحة رأسية

١) إنعكاس منحنى الدالة في محور السينات

لأي دالة د يكون المنحنى $ص = -د(س)$ هو نفس المنحنى $ص = د(س)$ بالانعكاس في محور السينات

٢) الإزاحة الأفقية

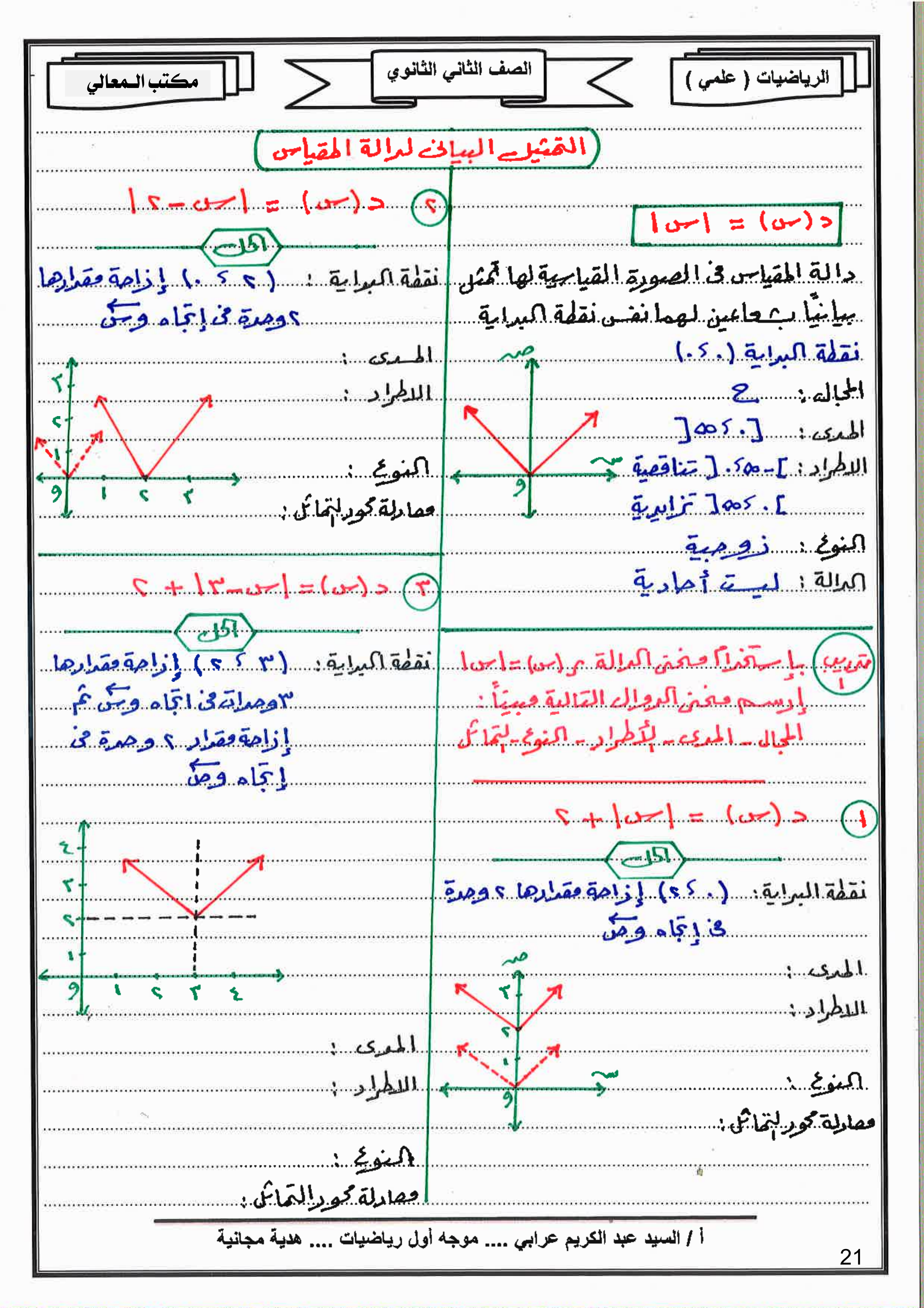
لأي دالة د يكون المنحنى $ص = د(س + أ)$ ، $أ \in ح - \{٠\}$ هو نفس المنحنى $ص = د(س)$ بإزاحة أفقية قدرها $|أ|$ وحدة طول

في اتجاه:
- $\overrightarrow{وس}$ يميناً عندما $أ < ٠$
- $\overleftarrow{وس'}$ يساراً عندما $أ > ٠$

٣) الإزاحة الرأسية

لأي دالة د يكون المنحنى $ص = د(س) + أ$ ، $أ \in ح - \{٠\}$ هو نفس المنحنى $ص = د(س)$ بإزاحة رأسية قدرها $|أ|$ وحدة طول

في اتجاه:
- $\overrightarrow{وص}$ للأعلى عندما $أ > ٠$
- $\overleftarrow{وص'}$ للأسفل عندما $أ < ٠$



التمثيل البياني لدالة المقياس

د(س) = |س|

دالة المقياس في الصورة القياسية لها تمثيل بيانيًا بـ شعاعين لهما نفس نقطة البداية

نقطة البداية (٠، ٠)

المجال: ح

المدى: [٠، ∞[

الاطراد:]-∞، ٠] تناقصية

[٠، ∞[تزايدية

النوع: زوجية

الدالة: ليست أحادية

تدريب ١ باستخدام منحنى الدالة ر(س) = |س| إرسم منحنى الدوال التالية مبينًا: المجال - المدى - الاطراد - النوع - التماثل

١) د(س) = |س| + ٢

الحل

نقطة البداية: (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و ص

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

٢) د(س) = |س - ٢|

الحل

نقطة البداية: (٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و س

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

٣) د(س) = |س - ٣| + ٢

الحل

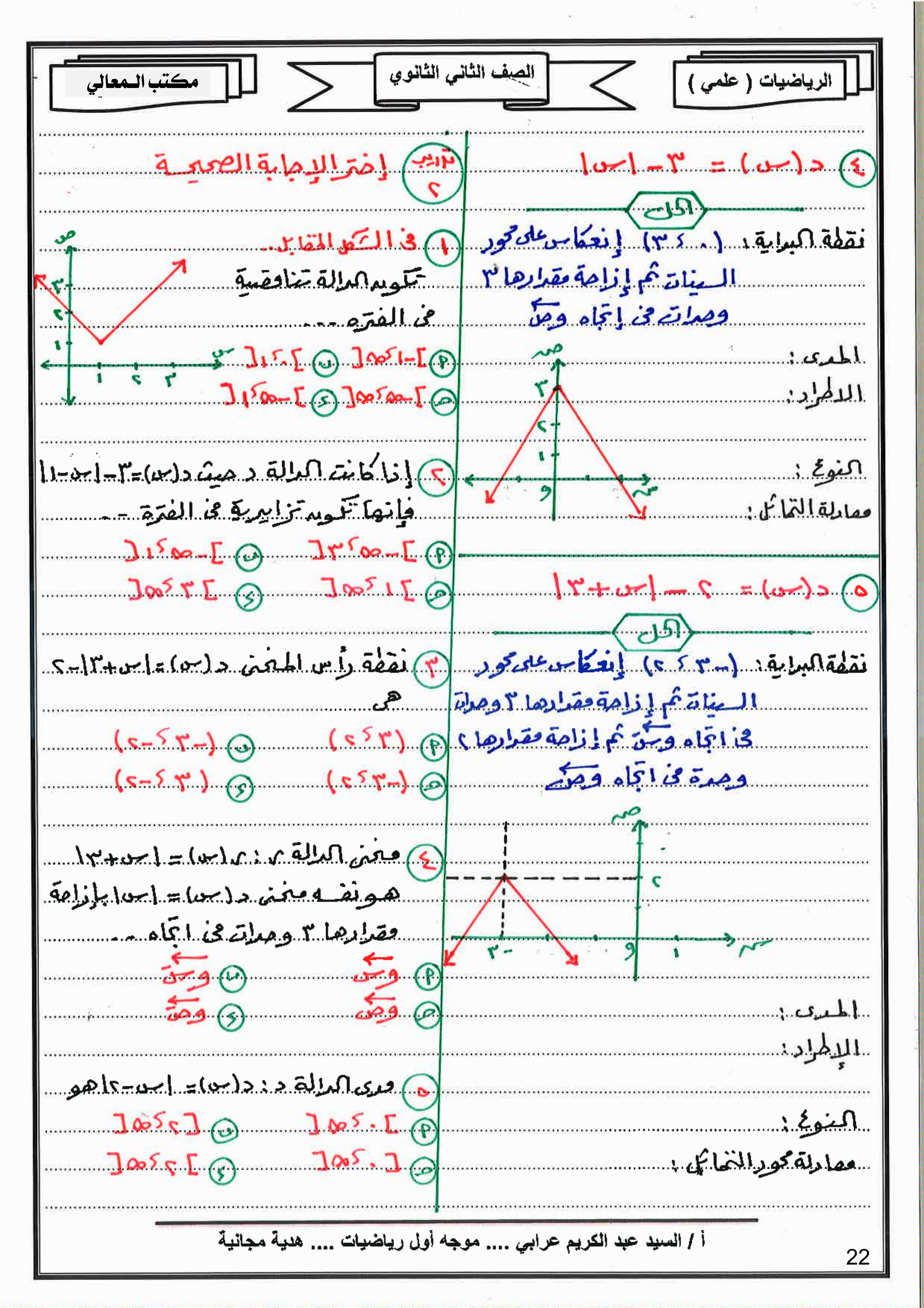
نقطة البداية: (٣، ٢) إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س ثم إزاحة مقدار ٢ وحدة في إتجاه و ص

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:



٤) د(س) = ٣ − |س|

الحل

نقطة البداية: (٠ ، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه وص←

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة التماثل:

٥) د(س) = ٢ − |س + ٣|

الحل

نقطة البداية: (−٣ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه وس← ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وص←

المدى:

الإطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

تدريب ٢ إختر الإجابة الصحيحة

١) في الشكل المقابل .. تكون الدالة تناقصية في الفترة .....

(أ)]−١ ، ∞[(ب)]٠ ، ١[(ج)]−∞ ، ∞[(د)]−∞ ، ١[

٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣ − |س − ١| فإنها تكون تزايدية في الفترة ...

(أ)]−∞ ، ٣[(ب)]−∞ ، ١[(ج)]١ ، ∞[(د)]٣ ، ∞[

٣) نقطة رأس المنحنى د(س) = |س + ٣| − ٢ هي

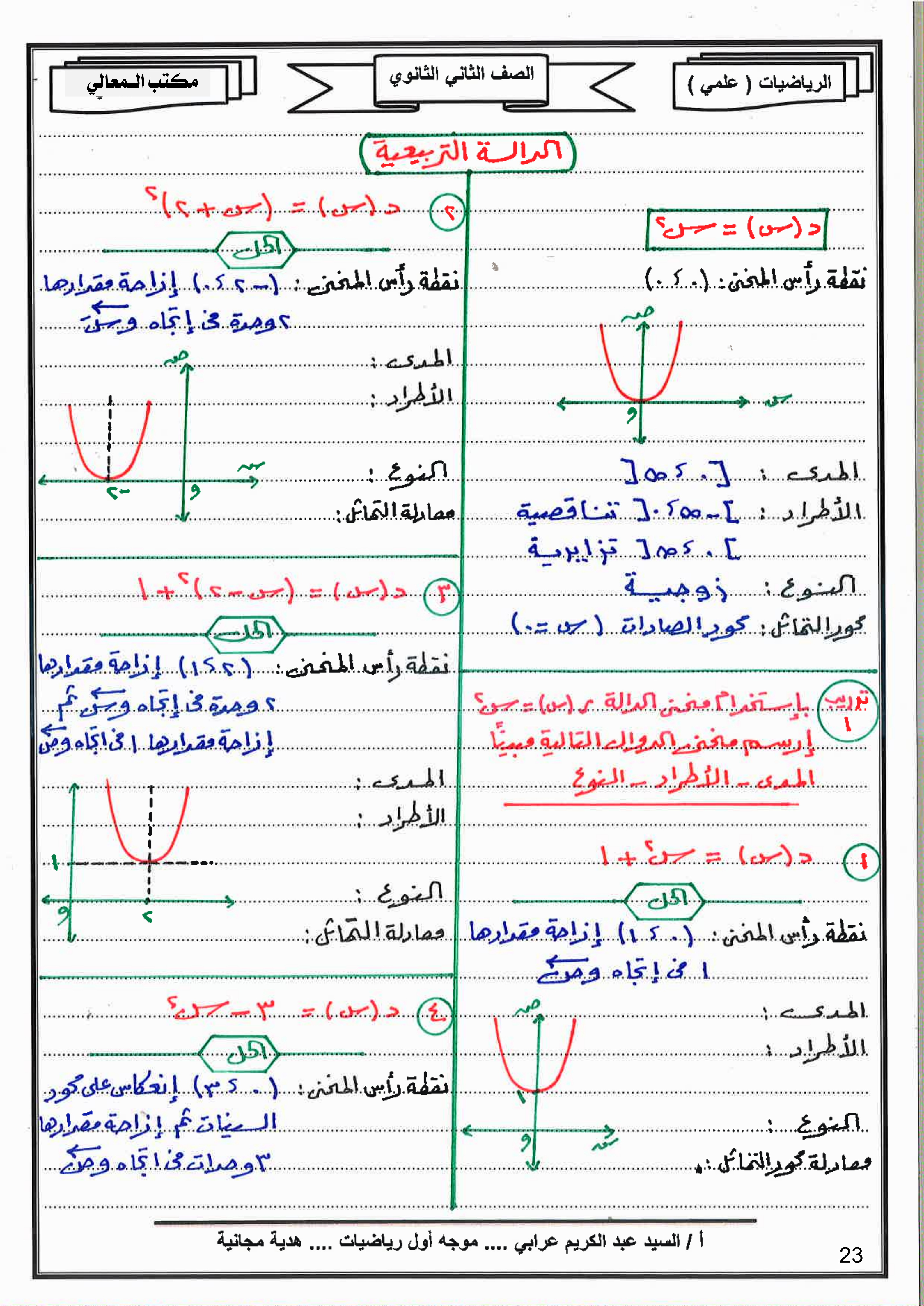
(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، −٢) (ج) (−٣ ، ٢) (د) (٣ ، −٢)

٤) منحنى الدالة ر: ر(س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ...

(أ) وس← (ب) وس→ (ج) وص← (د) وص←

٥) مدى الدالة د: د(س) = |س| − ٢ هو

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(ج) [٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[



الدالة التربيعية

د(س) = س²

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ٠)

المدى: [٠ ، ∞[

الاطراد:]-∞ ، ٠] تناقصية

[٠ ، ∞[تزايدية

النوع: زوجية

محور التماثل: محور الصادات (س = ٠)

تدريب ١: باستخدام منحنى الدالة د(س) = س² ارسم منحنى الدوال التالية مبينًا المدى - الاطراد - النوع

١) د(س) = س² + ١

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ١) إزاحة مقدارها ١ في اتجاه وص

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

٢) د(س) = (س + ٢)²

الحل

نقطة رأس المنحنى: (-٢ ، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وس

المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة التماثل:

٣) د(س) = (س - ٢)² + ١

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٢ ، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وس ثم إزاحة مقدارها ١ في اتجاه وص

المدى:

الاطراد:

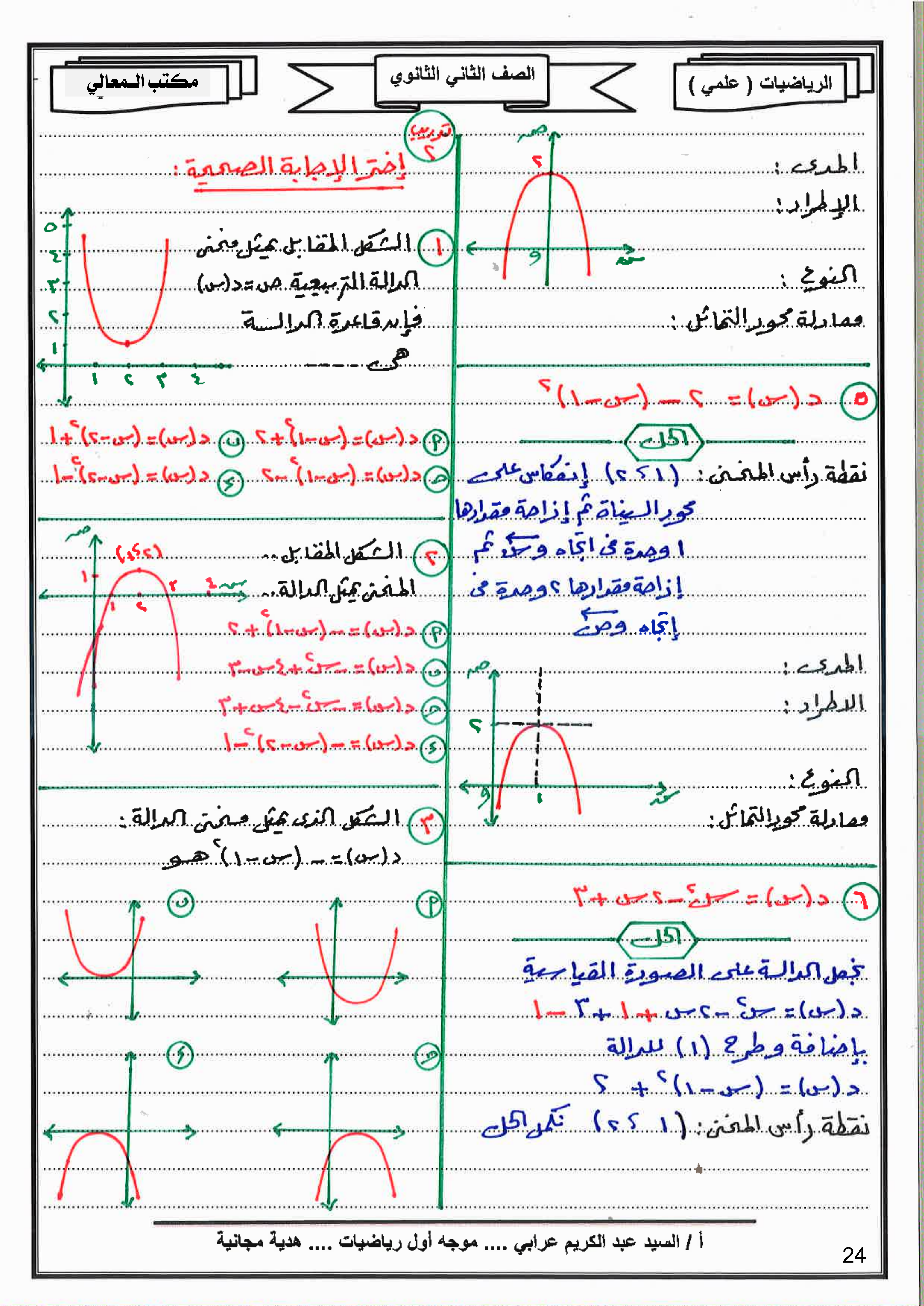
النوع:

معادلة التماثل:

٤) د(س) = ٣ - س²

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ٣) انعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه وص



المدى :

الاطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :

٥) $د(س) = ٢ - (س - ١)^٢$

الحل

نقطة رأس المنحنى : (١ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ١ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص

المدى :

الاطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :

٦) $د(س) = س^٢ - ٢س + ٣$

الحل

تجعل الدالة على الصورة القياسية

$د(س) = س^٢ - ٢س + ١ + ٣ - ١$

بإضافة وطرح (١) للدالة

$د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$

نقطة رأس المنحنى : (١ ، ٢) تكمل الحل

تدريب ٢

اختر الإجابة الصحيحة :

١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية ص = د(س) فإن قاعدة الدالة هي ....

أ) $د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$ ب) $د(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

جـ) $د(س) = (س - ١)^٢ - ٢$ د) $د(س) = (س - ٢)^٢ - ١$

٢) الشكل المقابل المنحنى يمثل الدالة ....

أ) $د(س) = -(س - ١)^٢ + ٢$

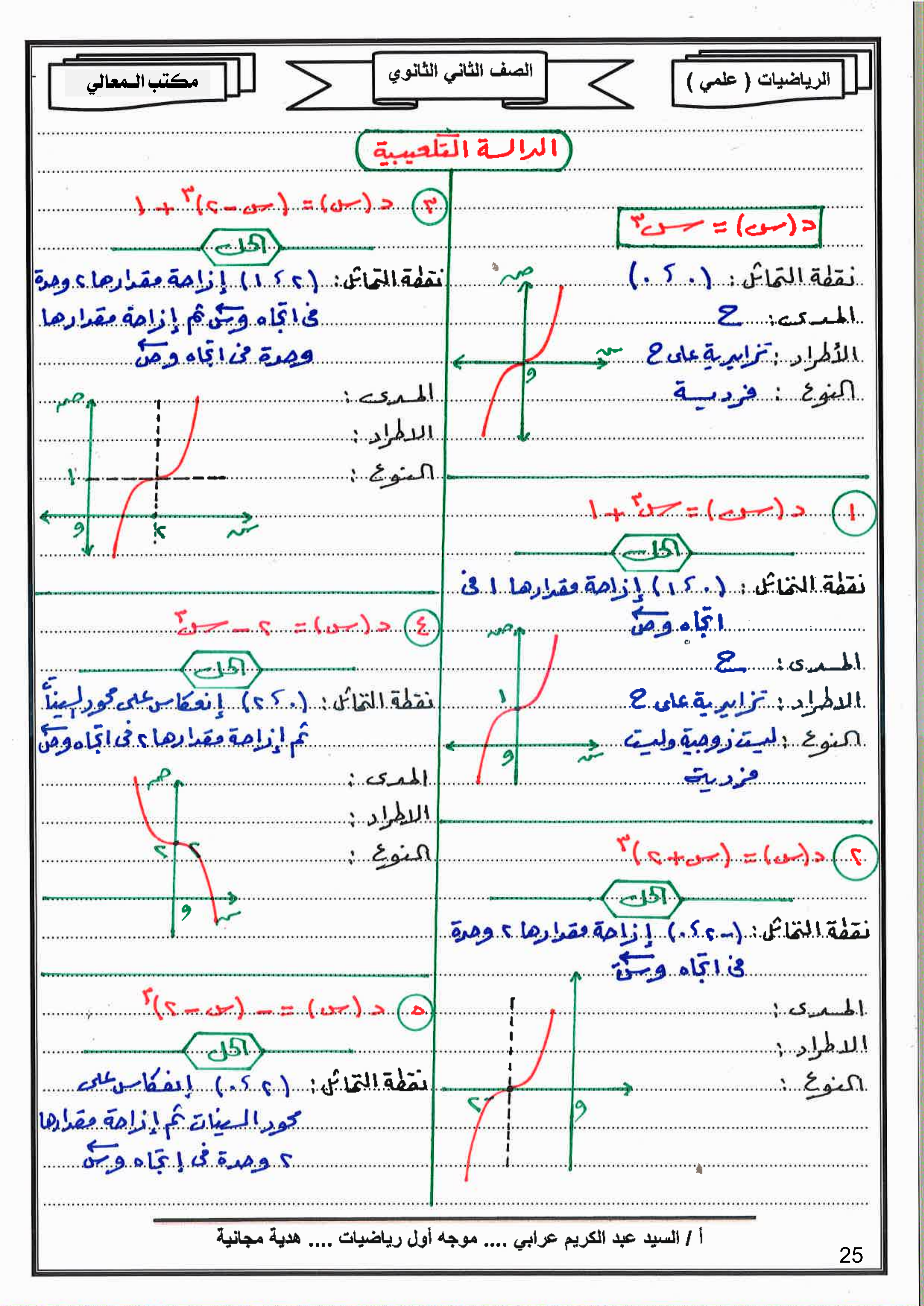
ب) $د(س) = -س^٢ + ٤س - ٣$

جـ) $د(س) = -س^٢ - ٤س + ٣$

د) $د(س) = -(س - ٢)^٢ - ١$

٣) الشكل الذي يمثل منحنى الدالة : $د(س) = -(س - ١)^٢$ هو

أ) ب) جـ) د)



الدالة التكعيبية

د(س) = س³

نقطة التماثل : (٠ ، ٠)

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : فردية

١) د(س) = س³ + ١

الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ١) إزاحة مقدارها ١ في اتجاه و ص

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : ليست زوجية وليست فردية

٢) د(س) = (س + ٢)³

الحل

نقطة التماثل : (−٢ ، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

المدى :

الاطراد :

النوع :

٣) د(س) = (س − ٢)³ + ١

الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة مقدارها وحدة في اتجاه و ص

المدى :

الاطراد :

النوع :

٤) د(س) = ٢ − س³

الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ في اتجاه و ص

المدى :

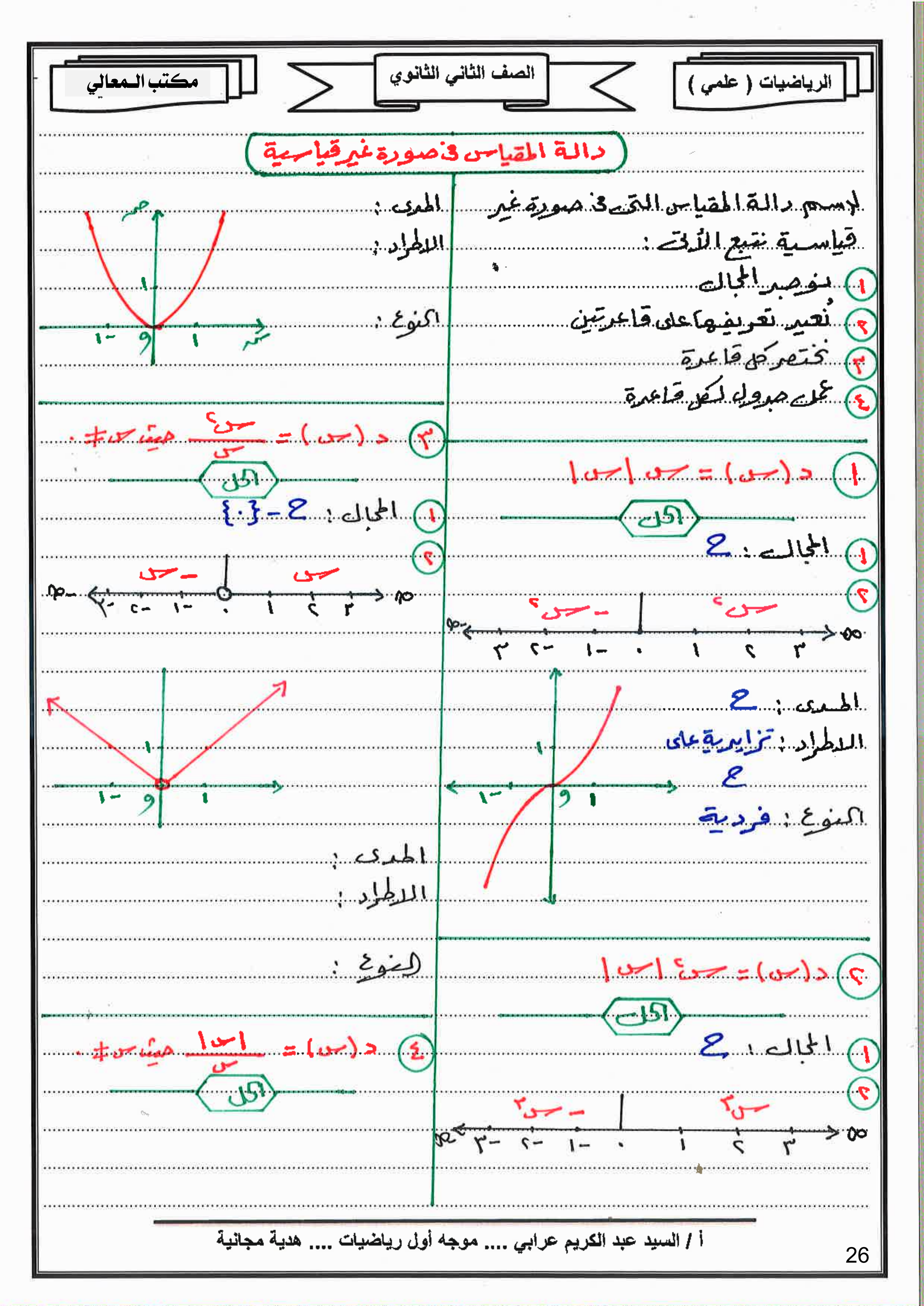
الاطراد :

النوع :

٥) د(س) = −(س − ٢)³

الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ٠) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س



دالة المقياس في صورة غير قياسية

لرسم دالة المقياس التي في صورة غير قياسية نتبع الآتي:

1. نوجد المجال
2. نعيد تعريفها على قاعدتين
3. نختصر كل قاعدة
4. نعمل جدول لكل قاعدة

المدى :

الاطراد :

النوع :

١) د(س) = س |س|

الحل

1. المجال : ح
2. – س٢ ، س٢

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : فردية

٢) د(س) = س٢ |س|

الحل

1. المجال : ح
2. – س٣ ، س٣

٣) د(س) = س٢ / |س| حيث س ≠ ٠

الحل

1. المجال : ح – {٠}
2. – س ، س

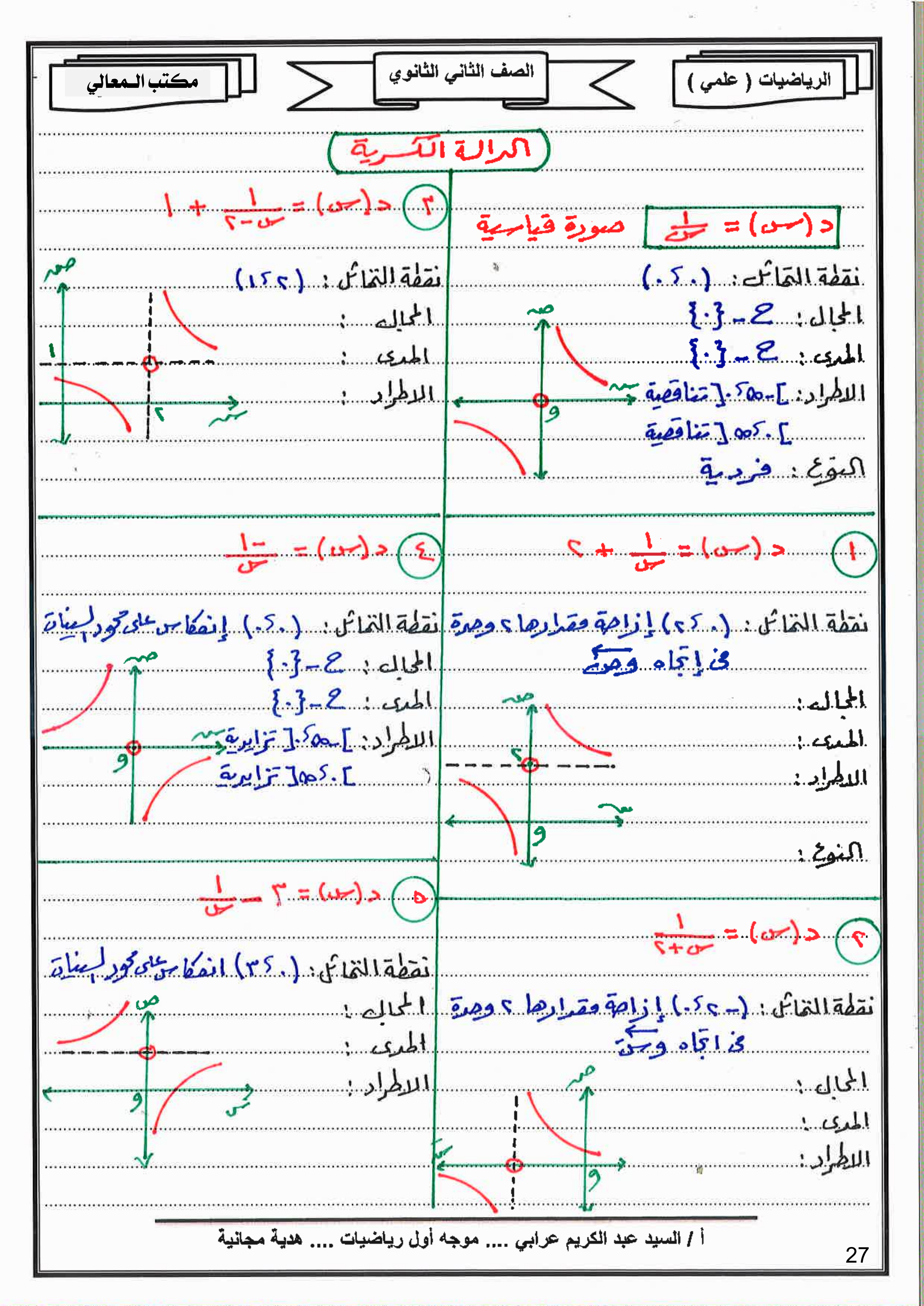
المدى :

الاطراد :

النوع :

٤) د(س) = |س| / س حيث س ≠ ٠

الحل



الدالة الكسرية

د(س) = $\frac{1}{س}$ صورة قياسية

نقطة التماثل: (٠، ٠)

المجال: ح - {٠}

المدى: ح - {٠}

الاطراد:]-∞، ٠[تناقصية

]٠، ∞[تناقصية

النوع: فردية

① د(س) = $\frac{1}{س}$ + ٢

نقطة التماثل: (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص

المجال:

المدى:

الاطراد:

النوع:

② د(س) = $\frac{1}{س+٢}$

نقطة التماثل: (-٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

المجال:

المدى:

الاطراد:

③ د(س) = $\frac{1}{س-٢}$ + ١

نقطة التماثل: (٢، ١)

المجال:

المدى:

الاطراد:

④ د(س) = $\frac{-1}{س}$

نقطة التماثل: (٠، ٠) إنعكاس على محور السينات

المجال: ح - {٠}

المدى: ح - {٠}

الاطراد:]-∞، ٠[تزايدية

]٠، ∞[تزايدية

⑤ د(س) = ٣ - $\frac{1}{س}$

نقطة التماثل: (٠، ٣) انعكاس على محور السينات

المجال:

المدى:

الاطراد:

الأسس الكسرية

تعريف

(1) إذا كان: $ن \in ص^{+} - \{1\}$ ، $أ \in ح$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

(2) إذا كان م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك ، $ن > 1$ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن: $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$

ملحوظة إذا كان: ن عدد زوجي ، $أ < 0$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

مثال

(1) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \in ح$

(2) $(-9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-9} \notin ح$

خواص الجذور النونية

إذا كان: أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن:

(1) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

(2) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

تدريب 1

(1) $\sqrt[3]{27 أ^{6} ب^{9}} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{أ^{6}} \times \sqrt[3]{ب^{9}} = 3 أ^{2} ب^{3}$

(2) $\sqrt[4]{81 س^{4} ص^{16}} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{س^{4}} \times \sqrt[4]{ص^{16}} = 3 |س| ص^{4}$

قوانين الأسس

(1) $أ^{صفر} = 1$

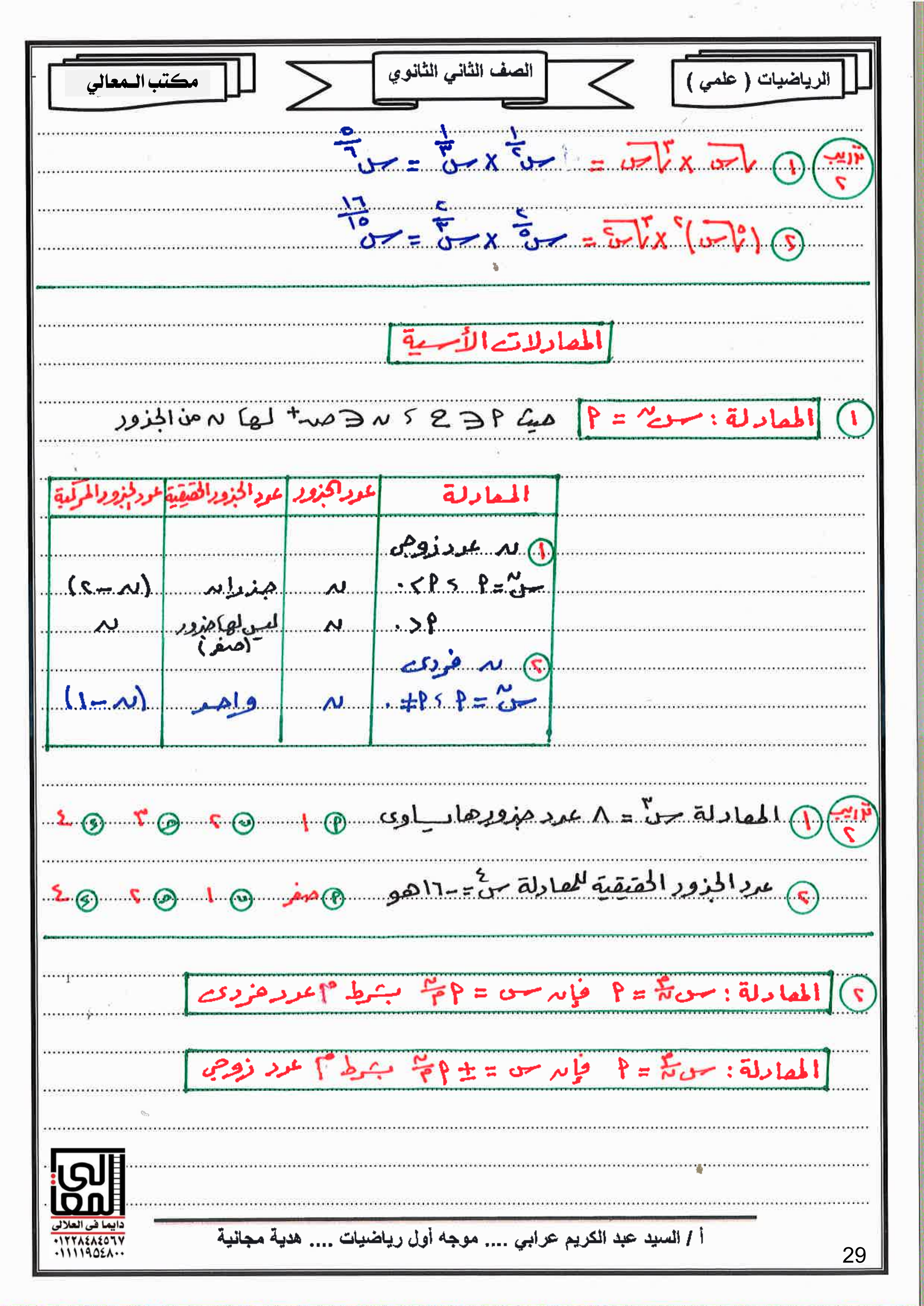
(2) $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$

(3) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

(4) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

(5) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

(6) $(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$



تدريب ٢

١) $\sqrt{س} \times \sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{2}} \times س^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{5}{6}}$

٢) $(\sqrt[5]{س})^{2} \times \sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{2}{5}} \times س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{16}{15}}$

المعادلات الأسية

١) **المعادلة : $س^{ن} = أ$** حيث أ ∈ ح ، ن ∈ $ص^{+}$ لها ن من الجذور

المعادلة	عدد الجذور	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة
① ن عدد زوجي			
$س^{ن} = أ$ ، أ > ٠	ن	جذران	(ن - ٢)
أ < ٠	ن	ليس لها جذور (صفر)	ن
② ن فردي			
$س^{ن} = أ$ ، أ ≠ ٠	ن	واحد	(ن - ١)

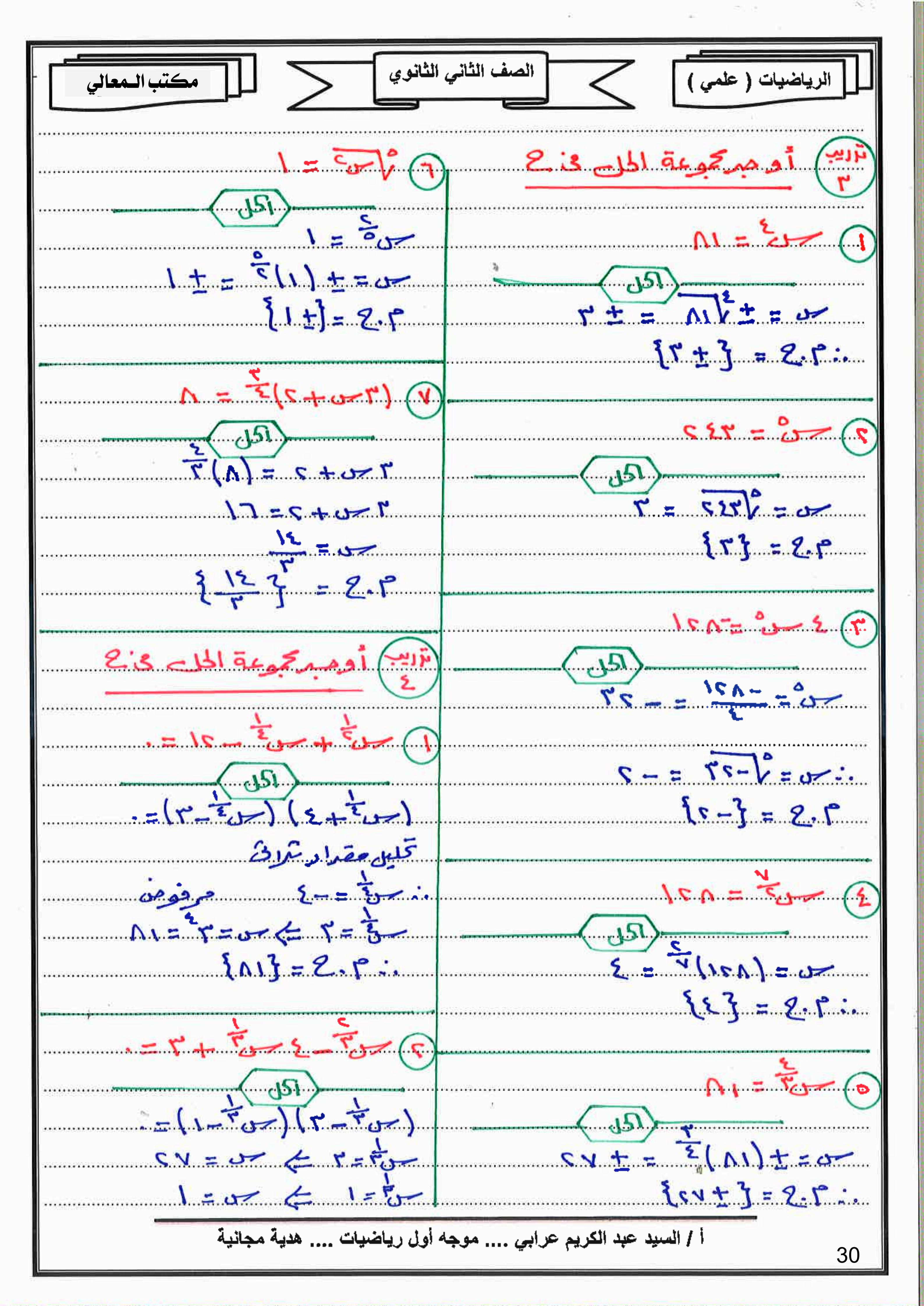
تدريب ٢

١) المعادلة $س^{3} = 8$ عدد جذورها يساوي (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٢) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{4} = -16$ هو (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

٢) **المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد فردي**

المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد زوجي



تدريب ٣: أوجد مجموعة الحل في ح

① $س^{٤} = ٨١$

الحل

$س = \pm \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{\pm ٣\}$

② $س^{٥} = ٢٤٣$

الحل

$س = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$

م.ح $= \{٣\}$

③ $٤س^{٥} = -١٢٨$

الحل

$س^{٥} = \frac{-١٢٨}{٤} = -٣٢$

$\therefore س = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

م.ح $= \{-٢\}$

④ $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

الحل

$س = (١٢٨)^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

⑤ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

$س = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ م.ح $= \{\pm ٢٧\}$

⑥ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$

الحل

$س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

$س = \pm (١)^{\frac{٥}{٢}} = \pm ١$

م.ح $= \{\pm ١\}$

⑦ $(٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

$٣س + ٢ = (٨)^{\frac{٤}{٣}}$

$٣س + ٢ = ١٦$

$س = \frac{١٤}{٣}$

م.ح $= \{\frac{١٤}{٣}\}$

تدريب ٤: أوجد مجموعة الحل في ح

① $س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٤}} - ١٢ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٤}} + ٤)(س^{\frac{١}{٤}} - ٣) = ٠$

تحليل مقدار ثلاثي

$\therefore س^{\frac{١}{٤}} = -٤$ مرفوض

$س^{\frac{١}{٤}} = ٣ \Leftarrow س = ٣^{٤} = ٨١$

$\therefore$ م.ح $= \{٨١\}$

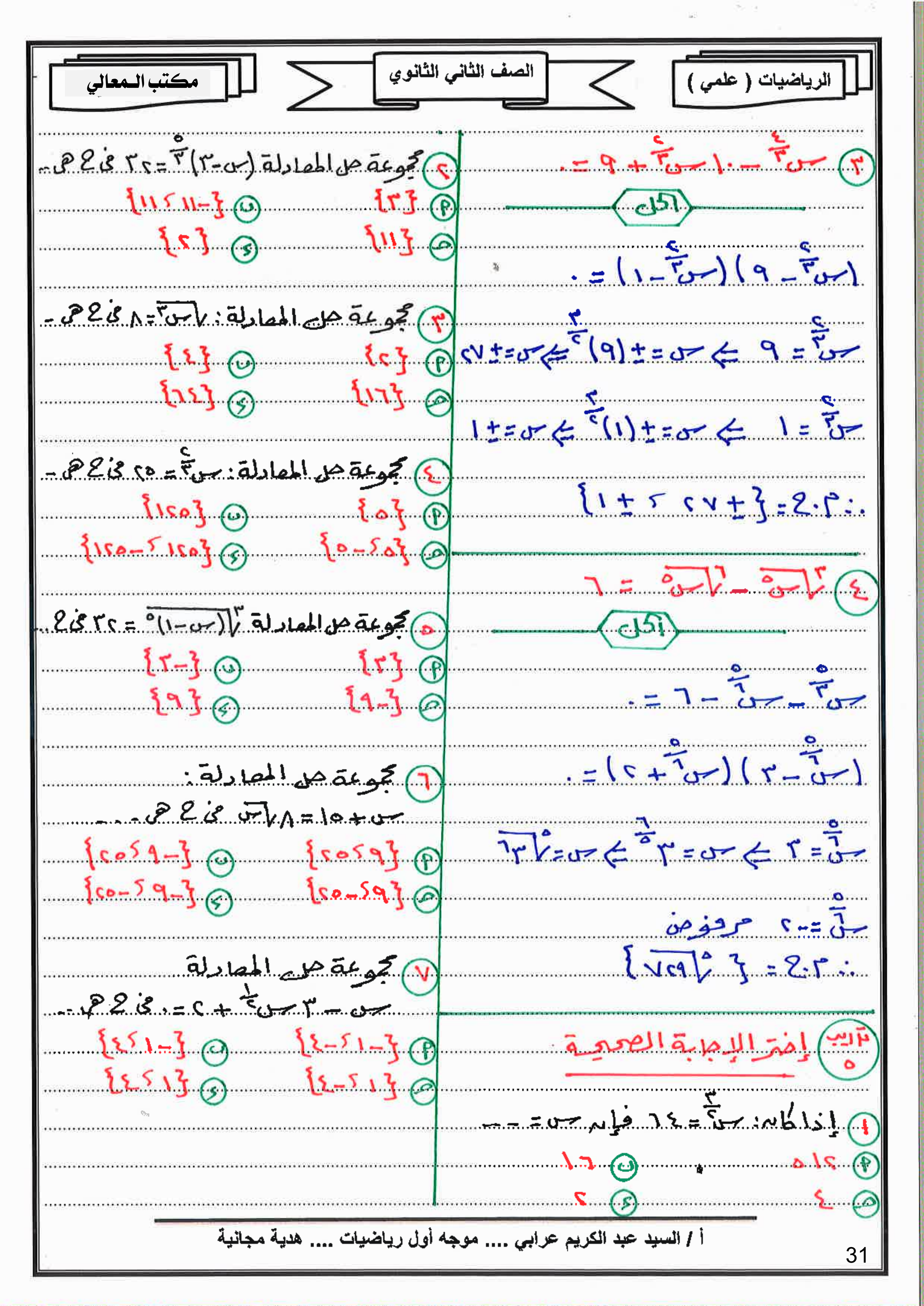
② $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤س^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٣}} - ٣)(س^{\frac{١}{٣}} - ١) = ٠$

$س^{\frac{١}{٣}} = ٣ \Leftarrow س = ٢٧$

$س^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow س = ١$



③ $س^{\frac{4}{3}} - 10\, س^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

الحل

$(س^{\frac{2}{3}} - 9)(س^{\frac{2}{3}} - 1) = 0$

$س^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftarrow س = \pm (9)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm 27$

$س^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftarrow س = \pm (1)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm 1$

∴ م.ح = {±٢٧ ، ±١}

④ $\sqrt[3]{س^5} - \sqrt[6]{س^5} = 6$

الحل

$س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{5}{6}} - 6 = 0$

$(س^{\frac{5}{6}} - 3)(س^{\frac{5}{6}} + 2) = 0$

$س^{\frac{5}{6}} = 3 \Leftarrow س = 3^{\frac{6}{5}} \Leftarrow س = \sqrt[5]{3^6}$

$س^{\frac{5}{6}} = -2$ مرفوض

∴ م.ح = { $\sqrt[5]{729}$ }

تدريب ٥ — اختر الإجابة الصحيحة

① إذا كانت: $س^{\frac{3}{2}} = 64$ فإن س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (ج) ٤ (د) ٢

② مجموعة حل المعادلة $(س-3)^{\frac{5}{3}} = 32$ في ح هي ....

(أ) {٣} (ب) {-١١ ، ١١} (ج) {١١} (د) {٢}

③ مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{س^3} = 8$ في ح هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (ج) {١٦} (د) {٦٤}

④ مجموعة حل المعادلة: $س^{\frac{2}{3}} = 25$ في ح هي ....

(أ) {٥} (ب) {١٢٥} (ج) {٥ ، -٥} (د) {١٢٥ ، -١٢٥}

⑤ مجموعة حل المعادلة $\sqrt[3]{(س-1)^5} = 32$ في ح ....

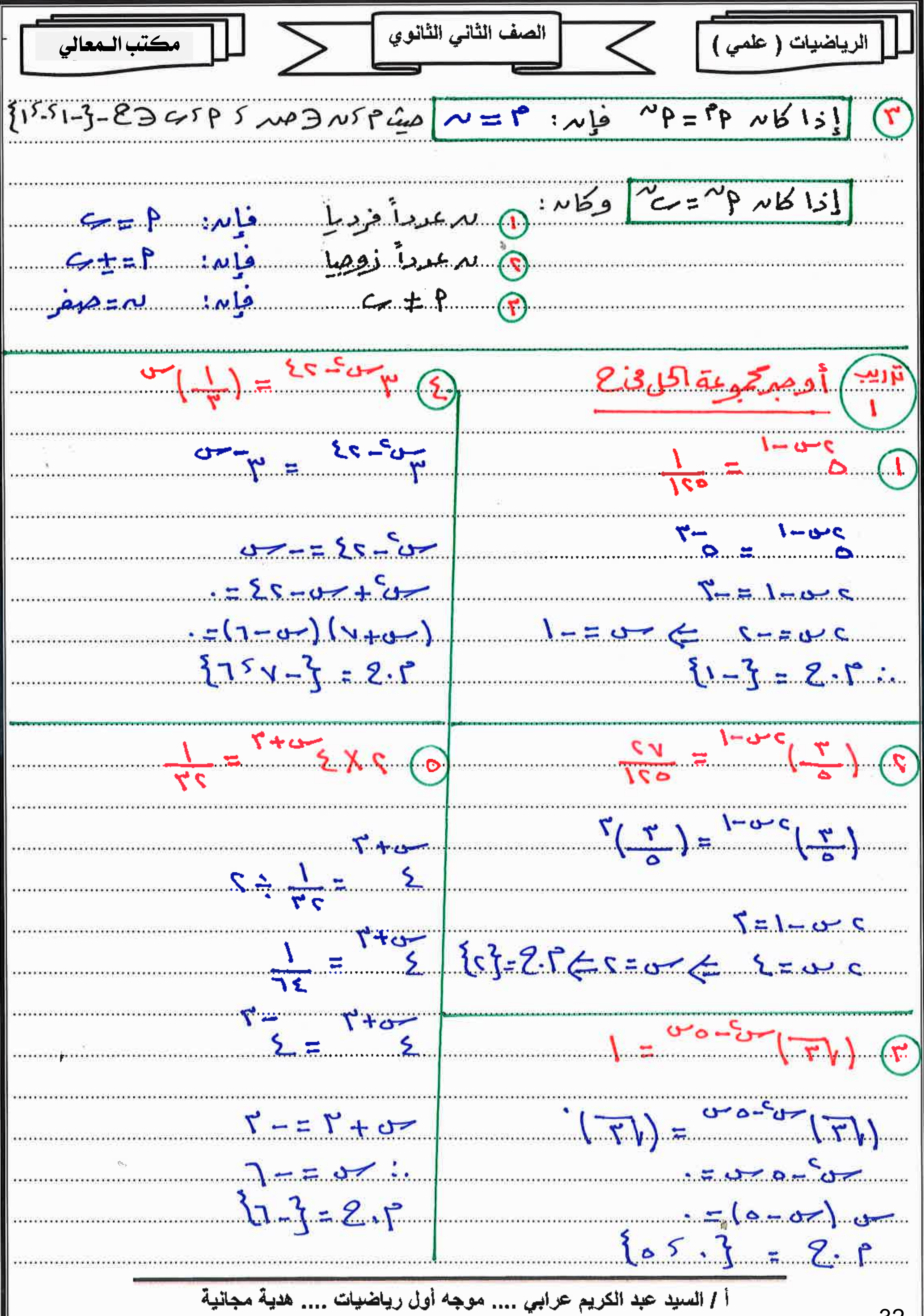
(أ) {٣} (ب) {-٣} (ج) {-٩} (د) {٩}

⑥ مجموعة حل المعادلة:
$س + 15 = 8\sqrt{س}$ في ح هي ....

(أ) {٩ ، ٢٥} (ب) {-٩ ، ٢٥} (ج) {٩ ، -٢٥} (د) {-٩ ، -٢٥}

⑦ مجموعة حل المعادلة
$س - 3\, س^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$ في ح هي ....

(أ) {-١ ، -٤} (ب) {-١ ، ٤} (ج) {١ ، -٤} (د) {١ ، ٤}



(٣) إذا كان $أ^م = أ^ن$ فإن: م = ن حيث م ، ن ∈ ص ، أ ∈ ح − {−١ ، ٠ ، ١}

إذا كان $أ^ن = ب^ن$ وكان:

(١) ن عدداً فردياً فإن: أ = ب

(٢) ن عدداً زوجياً فإن: أ = ± ب

(٣) أ ≠ ± ب فإن: ن = صفر

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل في ح

(١) $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$

$٥^{٢س-١} = ٥^{-٣}$

٢س − ١ = −٣

٢س = −٢ ⇐ س = −١

∴ م.ح = {−١}

(٢) $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

٢س − ١ = ٣

٢س = ٤ ⇐ س = ٢ ⇐ م.ح = {٢}

(٣) $(\sqrt{٣})^{س^٢-٥س} = ١$

$(\sqrt{٣})^{س^٢-٥س} = (\sqrt{٣})^{٠}$

$س^٢ - ٥س = ٠$

س (س − ٥) = ٠

م.ح = {٠ ، ٥}

(٤) $٣^{س^٢-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$

$٣^{س^٢-٤٢} = ٣^{-س}$

$س^٢ - ٤٢ = -س$

$س^٢ + س - ٤٢ = ٠$

(س + ٧)(س − ٦) = ٠

م.ح = {−٧ ، ٦}

(٥) $٢ \times ٤^{س+٣} = \frac{١}{٣٢}$

$٤^{س+٣} = \frac{١}{٣٢} \div ٢$

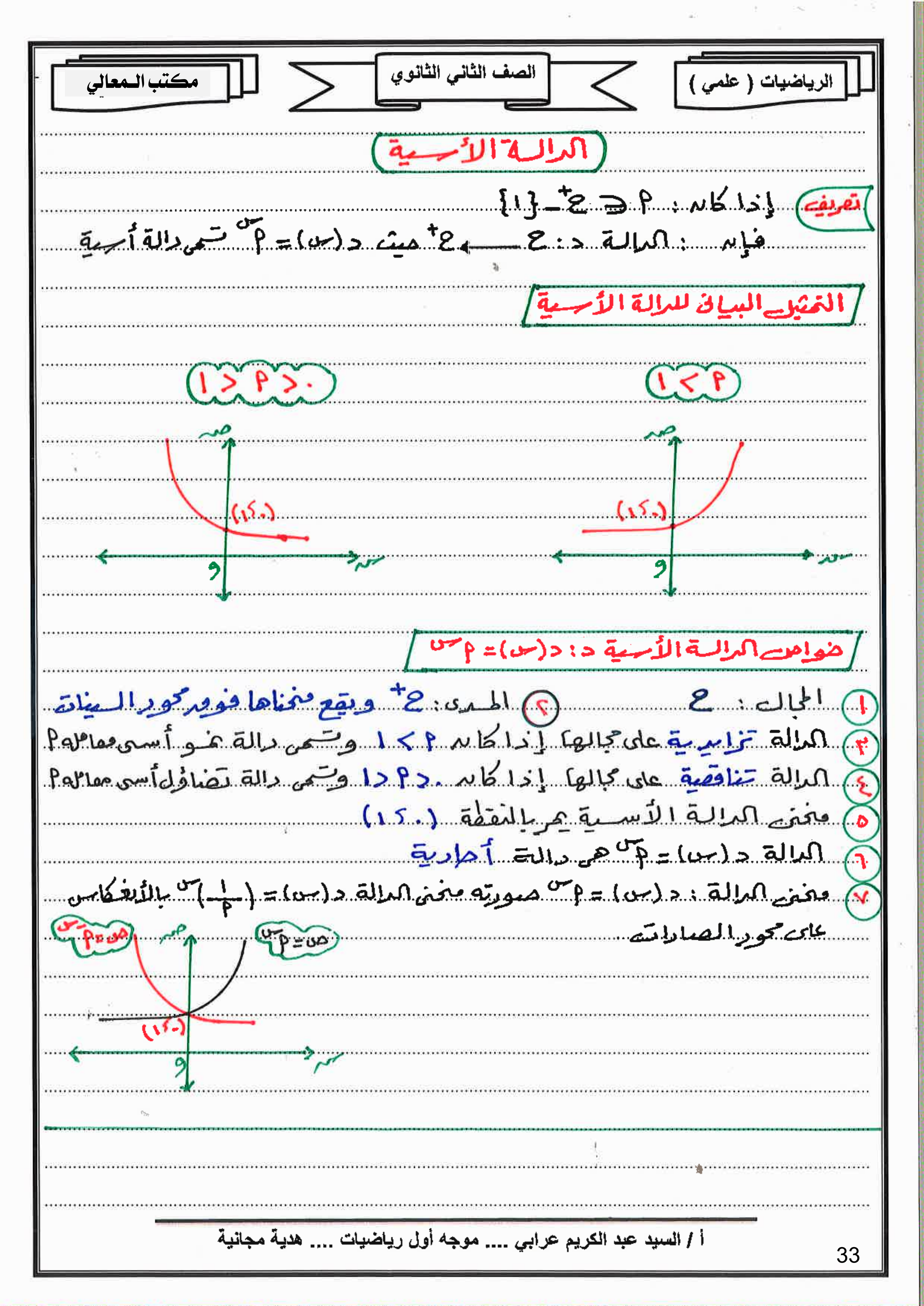
$٤^{س+٣} = \frac{١}{٦٤}$

$٤^{س+٣} = ٤^{-٣}$

س + ٣ = −٣

∴ س = −٦

م.ح = {−٦}



الدالة الأسية

تعريف: إذا كان: $أ \in ح^+ - \{1\}$

فإن: الدالة $د : ح \longrightarrow ح^+$ حيث $د(س) = أ^س$ تسمى دالة أسية

التمثيل البياني للدالة الأسية

خواص الدالة الأسية د: $د(س) = أ^س$

١) المجال: ح ٢) المدى: $ح^+$ ويقع منحناها فوق محور السينات

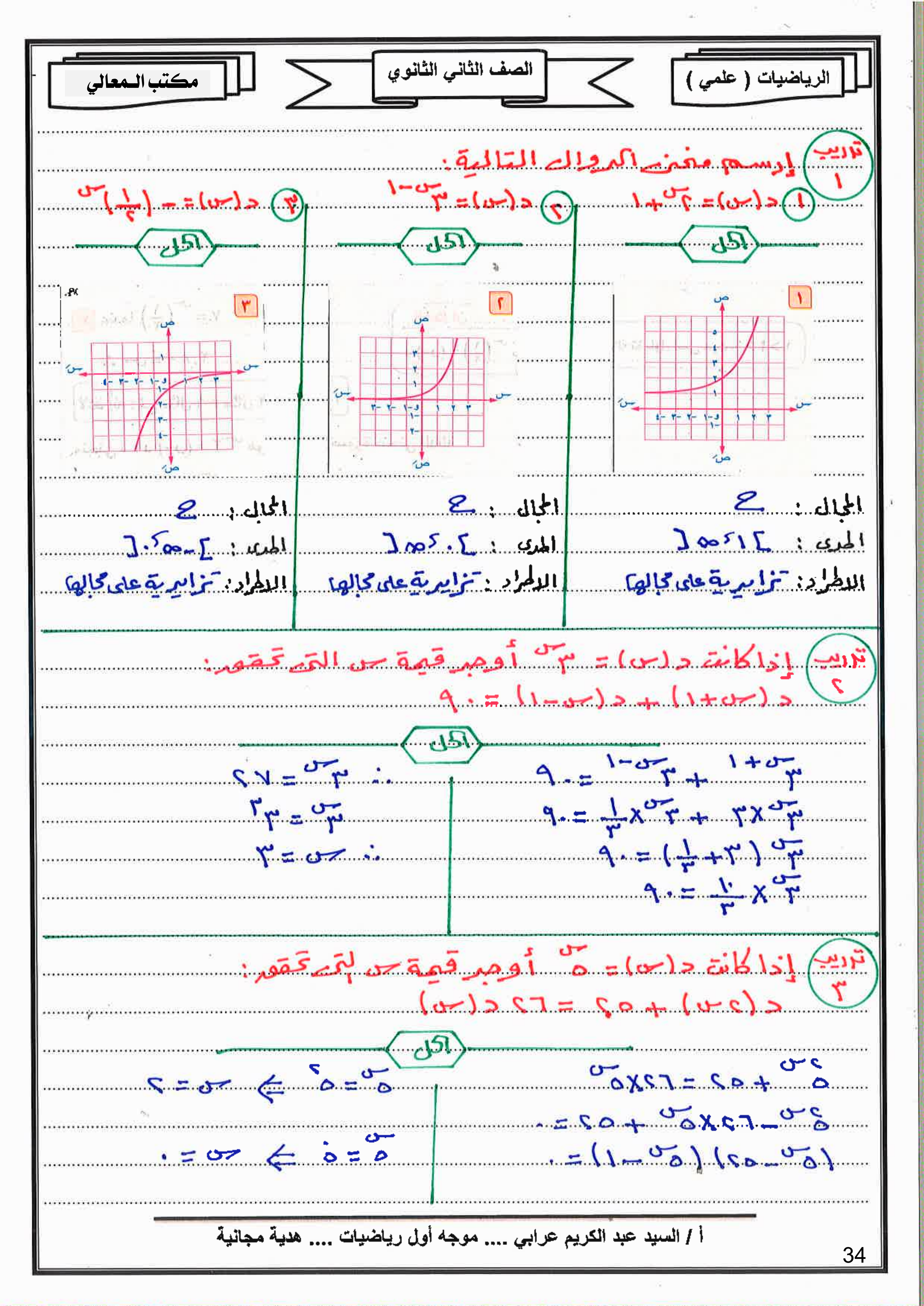
٣) الدالة تزايدية على مجالها إذا كان $أ > 1$ وتسمى دالة نمو أسي معامله أ

٤) الدالة تناقصية على مجالها إذا كان $0 < أ < 1$ وتسمى دالة تضاؤل أسي معامله أ

٥) منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠،١)

٦) الدالة $د(س) = أ^س$ هي دالة أحادية

٧) منحنى الدالة: $د(س) = أ^س$ صورته منحنى الدالة $د(س) = \left(\frac{1}{أ}\right)^س$ بالانعكاس على محور الصادات



تدريب ١ ارسم منحنى الدوال التالية:

① $د(س) = ٢^{س} + ١$

② $د(س) = ٣^{س-١}$

③ $د(س) = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

الحل

(١) المجال : ح
المدى : $]١ ، \infty[$
الاطراد : تزايدية على مجالها

(٢) المجال : ح
المدى : $]٠ ، \infty[$
الاطراد : تزايدية على مجالها

(٣) المجال : ح
المدى : $]-\infty ، ٠[$
الاطراد : تزايدية على مجالها

تدريب ٢ إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق:
$د(س+١) + د(س-١) = ٩٠$

الحل

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$

$٣^{س} \times ٣ + ٣^{س} \times \frac{١}{٣} = ٩٠$

$٣^{س}\left(٣ + \frac{١}{٣}\right) = ٩٠$

$٣^{س} \times \frac{١٠}{٣} = ٩٠$

$\therefore ٣^{س} = ٢٧$

$٣^{س} = ٣^{٣}$

$\therefore س = ٣$

تدريب ٣ إذا كانت $د(س) = ٥^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق:
$د(٢س) + ٢٥ = ٢٦ د(س)$

الحل

$٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

$٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

$(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

$٥^{س} = ٥^{٢} \Leftarrow س = ٢$

$٥^{س} = ٥^{٠} \Leftarrow س = ٠$

تدريب ٤ — اختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن: د(-س) =

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $(\frac{١}{٢})^{س}$ (ج) $٢^{س+١}$ (د) $(\frac{١}{٢})^{-س}$

٢) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فإن: د(أ) × د(ب) =

(أ) د(أ+ب) (ب) أب (ج) د(أب) (د) أ+ب

٣) إذا كان: د(س+١) = $٢^{س}$ وكان: د(أ) = ٨ فإن أ =

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

٤) منحنى الدالة د(س) = $٣^{-س}$ + ٤ يقطع محور الصادات في النقطة

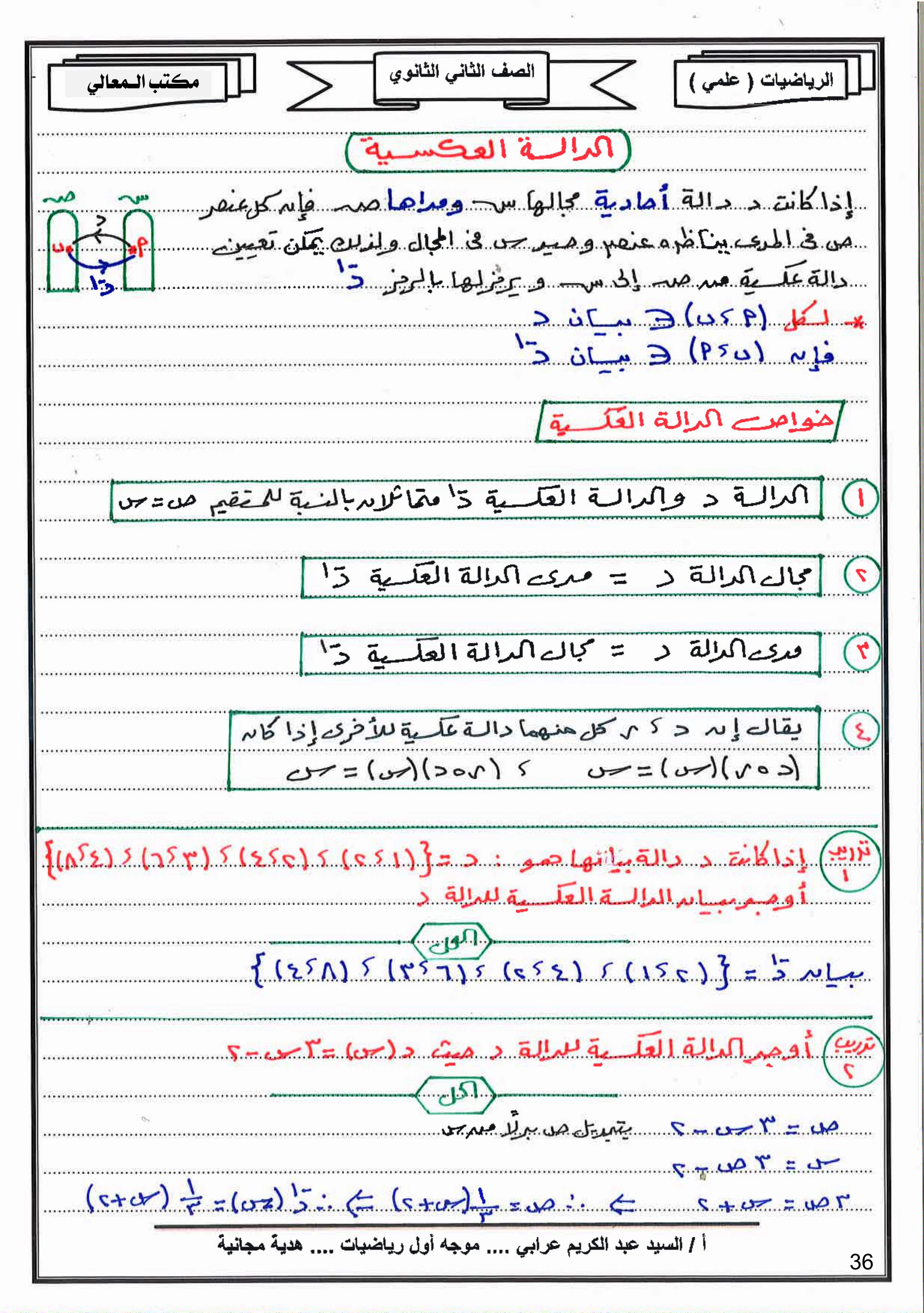
(أ) (٥ ، ٠) (ب) (٠ ، ٥) (ج) (٦ ، ٠) (د) (٠ ، ٦)

٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث

(أ) د(س) = $٢^{س+١}$ (ب) د(س) = $٢^{-س}$ (ج) د(س) = $٢^{س}$ (د) د(س) = $٢^{س-١}$

٦) الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البياني من

(أ) محور السينات (بالاتجاه الموجب)
(ب) محور السينات (بالاتجاه السالب)
(ج) محور الصادات (بالاتجاه الموجب)
(د) محور الصادات (بالاتجاه السالب)



الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإنه كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز $د^{-1}$

* لكل (أ ، ب) ∈ بيان د
فإن (ب ، أ) ∈ بيان $د^{-1}$

خواص الدالة العكسية

① الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

② مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$

③ مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

④ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان
(د ∘ ر)(س) = س ، (ر ∘ د)(س) = س

تدريب ١: إذا كانت د دالة بيانها هو : د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د

الحل

بيان $د^{-1}$ = {(٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤)}

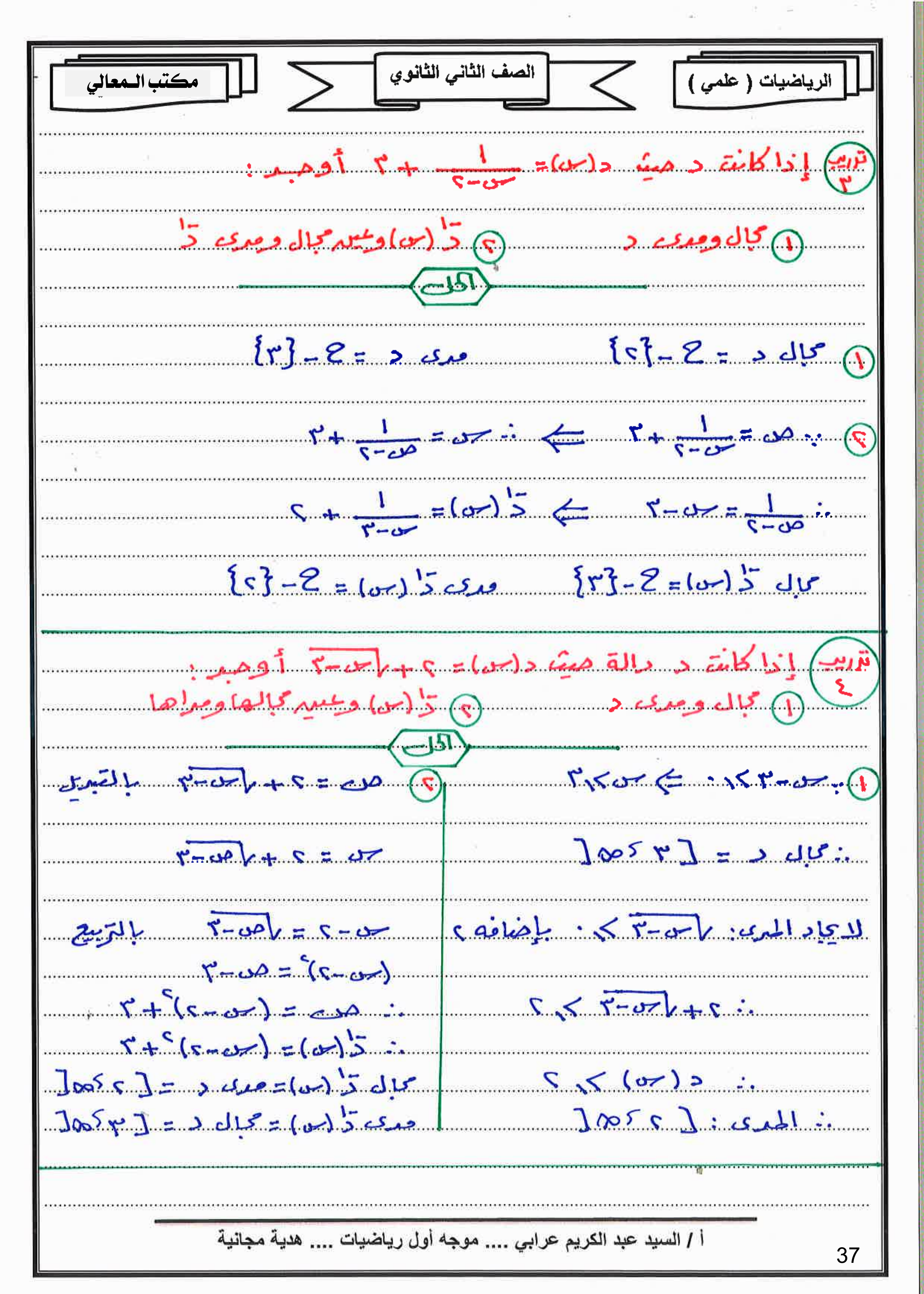
تدريب ٢: أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س − ٢

الحل

ص = ٣س − ٢ بتبديل ص بدلاً من س

س = ٣ص − ٢

٣ص = س + ٢ ⇐ ∴ ص = $\frac{1}{3}$ (س + ٢) ⇐ ∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)



تدريب ٣

إذا كانت د حيث $د(س) = \frac{1}{س - ٢} + ٣$ أوجد :

(١) مجال ومدى د   (٢) $د^{-1}(س)$ وبين مجال ومدى $د^{-1}$

الحل

(١) مجال د $= ح - \{٢\}$ مدى د $= ح - \{٣\}$

(٢) ∵ $ص = \frac{1}{س - ٢} + ٣$ ⇐ ∴ $س = \frac{1}{ص - ٢} + ٣$

∴ $\frac{1}{ص - ٢} = س - ٣$ ⇐ $د^{-1}(س) = \frac{1}{س - ٣} + ٢$

مجال $د^{-1}(س) = ح - \{٣\}$ مدى $د^{-1}(س) = ح - \{٢\}$

تدريب ٤

إذا كانت د دالة حيث $د(س) = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ أوجد :

(١) مجال ومدى د   (٢) $د^{-1}(س)$ وبين مجالها ومداها

الحل

(١) ∵ $س - ٣ \geq ٠$ ⇐ $س \geq ٣$

∴ مجال د $= [٣ ، \infty[$

لإيجاد المدى : $\sqrt{س - ٣} \geq ٠$ بإضافة ٢

∴ $٢ + \sqrt{س - ٣} \geq ٢$

∴ $د(س) \geq ٢$

∴ المدى : $[٢ ، \infty[$

(٢) $ص = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ بالتبديل

$س = ٢ + \sqrt{ص - ٣}$

$س - ٢ = \sqrt{ص - ٣}$ بالتربيع

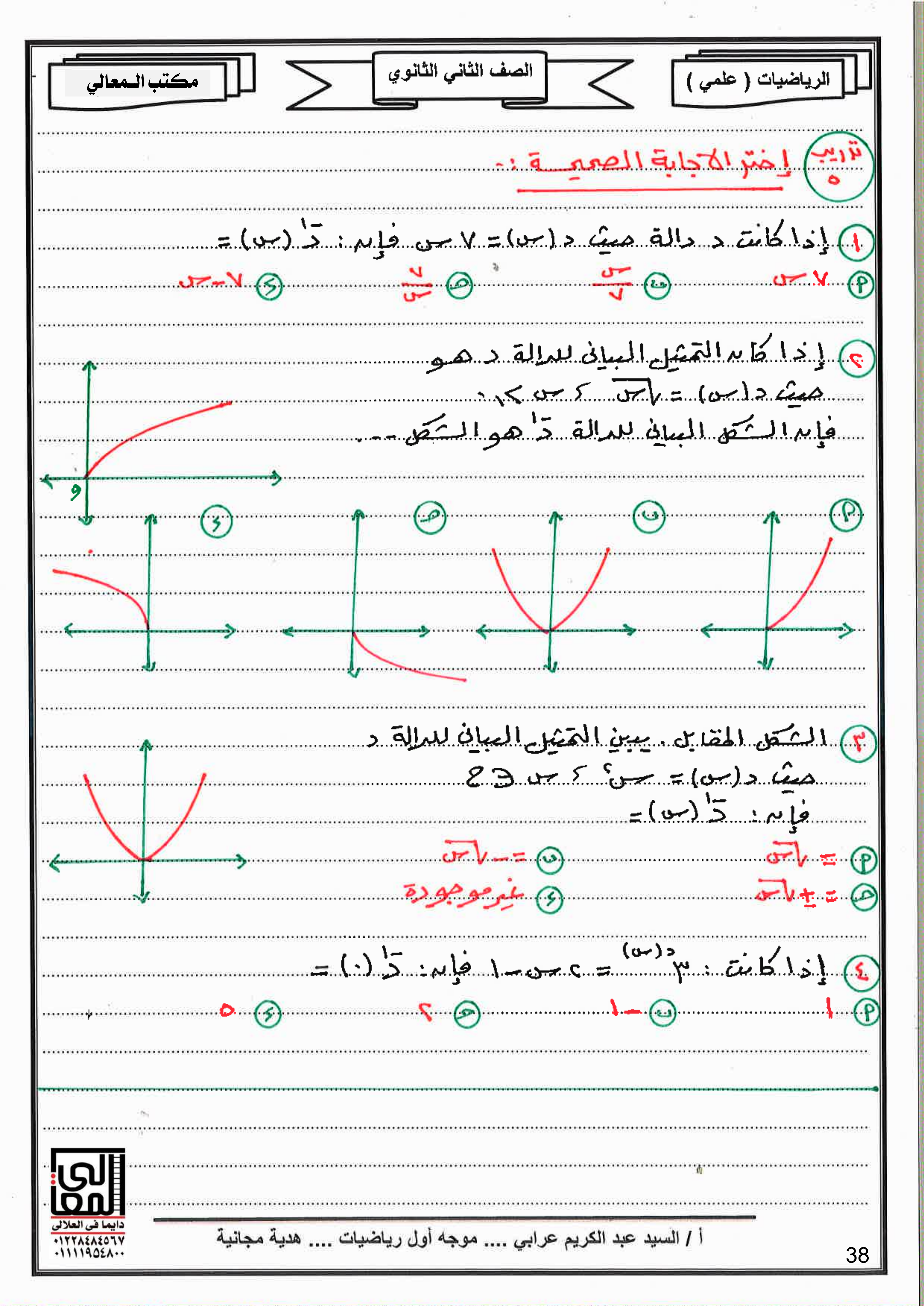
$(س - ٢)^2 = ص - ٣$

∴ $ص = (س - ٢)^2 + ٣$

∴ $د^{-1}(س) = (س - ٢)^2 + ٣$

مجال $د^{-1}(س) =$ مدى د $= [٢ ، \infty[$

مدى $د^{-1}(س) =$ مجال د $= [٣ ، \infty[$



تدريب ٥

اختر الإجابة الصحيحة :-

١) إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٧ س فإن : د'(س) =

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ حـ

٢) إذا كان التمثيل البياني للدالة د هو
حيث د(س) = √س ، س ≥ ٠
فإن الشكل البياني للدالة د' هو الشكل ...

و

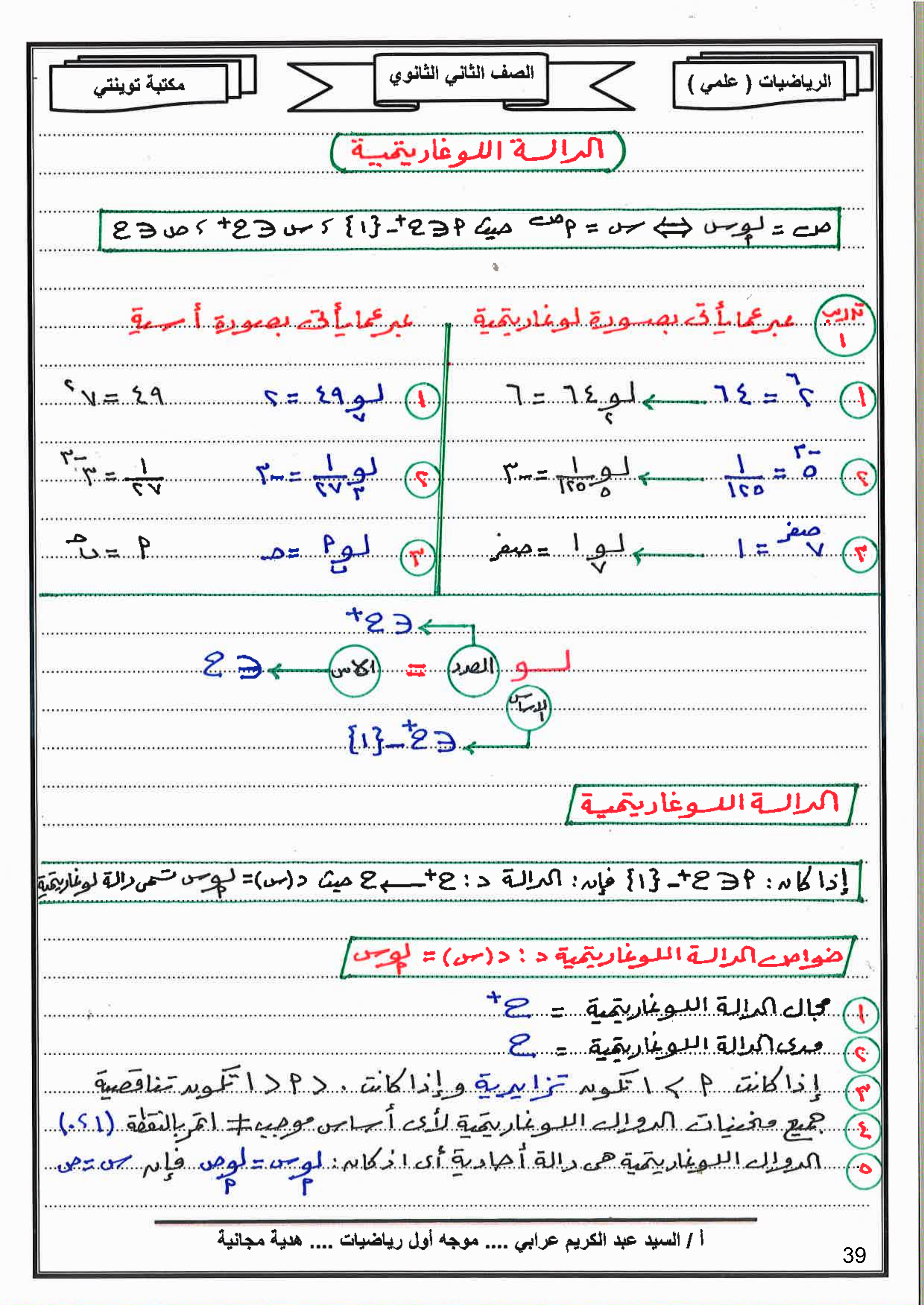
(أ) (ب) (ج) (د)

٣) الشكل المقابل يبين التمثيل البياني للدالة د
حيث د(س) = س² ، س ∈ ح
فإن : د'(س) =

(أ) = √س (ب) = -√س
(ج) = ±√س (د) غير موجودة

٤) إذا كانت : $٣^{د(س)}$ = ٢ س - ١ فإن : د'(٠) =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٢ (د) ٥



الدالة اللوغاريتمية

ص = لو$_{أ}$ س ⟺ س = أ^{ص} حيث أ ∈ ح$^{+}$ − {١} ، س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح

تدريب ١

عبر عما يأتي بصورة لوغاريتمية:

١) $٢^{٦} = ٦٤$ ⟵ لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

٢) $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$ ⟵ لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = −٣

٣) ٧^{صفر} = ١ ⟵ لو$_{٧}$ ١ = صفر

عبر عما يأتي بصورة أسية:

١) لو$_{٧}$ ٤٩ = ٢ ⟵ $٤٩ = ٧^{٢}$

٢) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٣ ⟵ $\frac{١}{٢٧} = ٣^{-٣}$

٣) لو$_{ب}$ أ = جـ ⟵ أ = ب^{جـ}

لو$_{(الأساس)}$ (العدد) = (الأس)

- العدد ∈ ح$^{+}$
- الأس ∈ ح
- الأساس ∈ ح$^{+}$ − {١}

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن: الدالة د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د(س) = لو$_{أ}$ س تسمى دالة لوغاريتمية

خواص الدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{أ}$ س

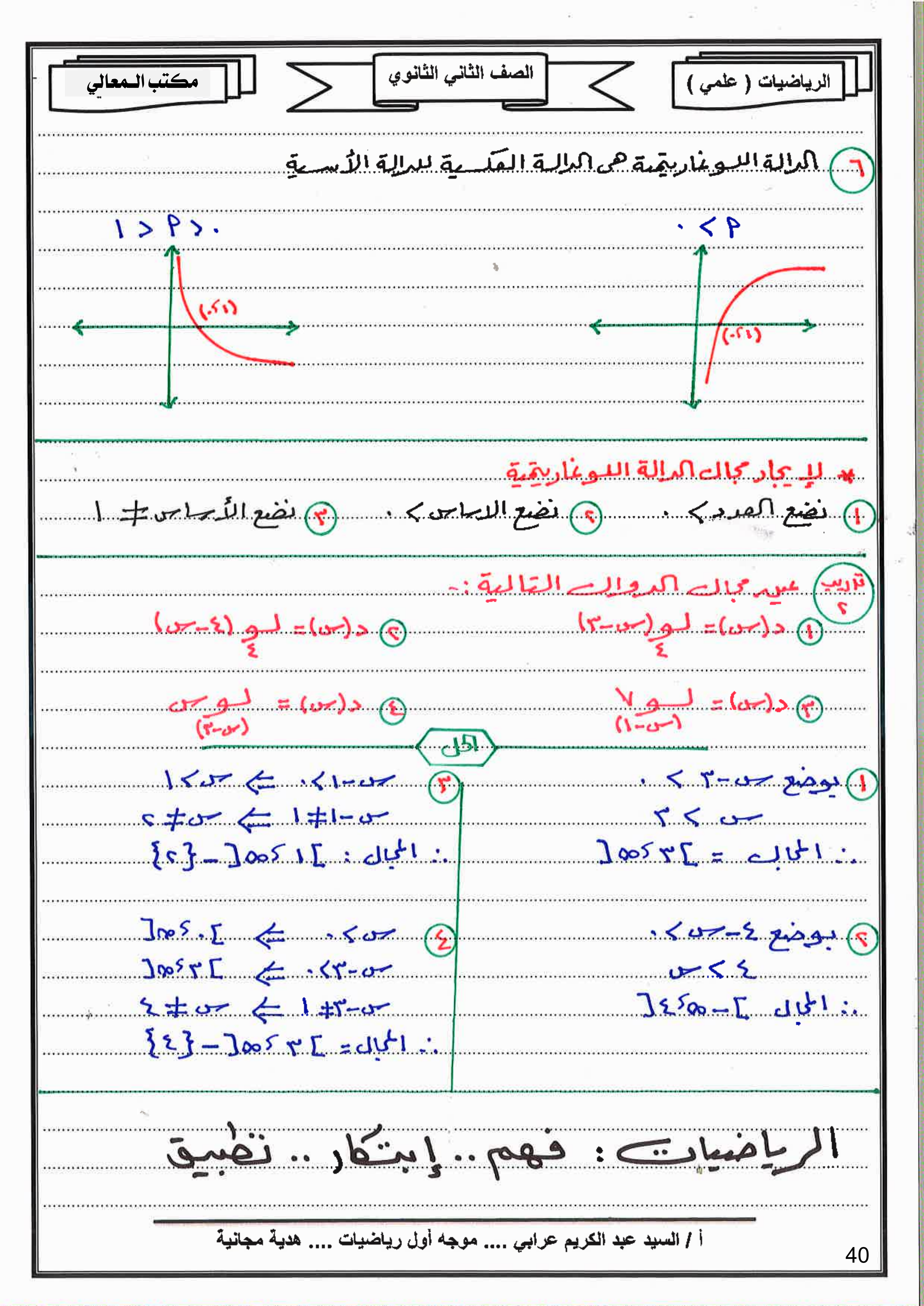
١) مجال الدالة اللوغاريتمية = ح$^{+}$

٢) مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣) إذا كانت أ > ١ تكون تزايدية وإذا كانت ٠ < أ < ١ تكون تناقصية

٤) جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأي أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥) الدوال اللوغاريتمية هي دالة أحادية أي إذا كان: لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن س = ص



٦) الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

* لإيجاد مجال الدالة اللوغاريتمية

١) نضع العدد > ٠   ٢) نضع الأساس > ٠   ٣) نضع الأساس ≠ ١

تدريب ٢: عين مجال الدوال التالية :-

١) د(س) = لو$_{٤}$ (س-٣)   ٢) د(س) = لو$_{٤}$ (٤-س)

٣) د(س) = لو$_{(س-١)}$ ٧   ٤) د(س) = لو$_{(س-٣)}$ س

الحل

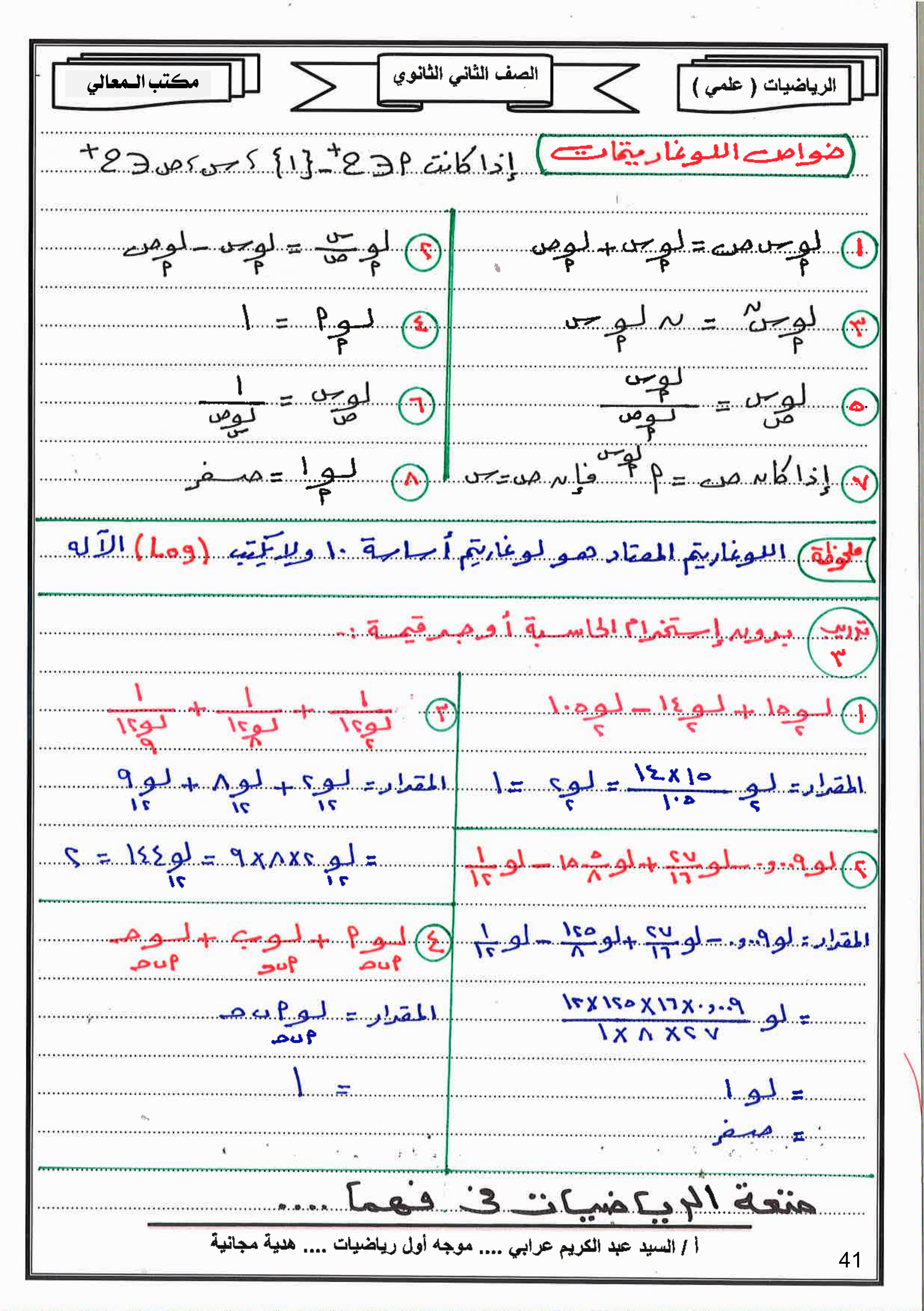
١) بوضع س-٣ > ٠
س > ٣
∴ المجال =]٣، ∞[

٢) بوضع ٤-س > ٠
٤ > س
∴ المجال]-∞، ٤[

٣) س-١ > ٠ ⇐ س > ١
س-١ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٢
∴ المجال :]١، ∞[- {٢}

٤) س > ٠ ⇐]٠، ∞[
س-٣ > ٠ ⇐]٣، ∞[
س-٣ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٤
∴ المجال =]٣، ∞[- {٤}

الرياضيات : فهم .. إبتكار .. تطبيق



خواص اللوغاريتمات

إذا كانت أ $\in$ ح$^{+}$ − {١} ، س ، ص $\in$ ح$^{+}$

١) $\text{لو}_{أ}$ س ص = $\text{لو}_{أ}$ س + $\text{لو}_{أ}$ ص

٢) $\text{لو}_{أ} \frac{س}{ص}$ = $\text{لو}_{أ}$ س − $\text{لو}_{أ}$ ص

٣) $\text{لو}_{أ}$ س^{ن} = ن $\text{لو}_{أ}$ س

٤) $\text{لو}_{أ}$ أ = ١

٥) $\text{لو}_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{أ}\text{ س}}{\text{لو}_{أ}\text{ ص}}$

٦) $\text{لو}_{ص}$ س = $\frac{1}{\text{لو}_{س}\text{ ص}}$

٧) إذا كان ص = أ$^{\text{لو}_{أ}\text{ س}}$ فإن ص = س

٨) $\text{لو}_{أ}$ ١ = صفر

ملحوظة: اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ ولا يكتب (Log) الآله

تدريب ٣: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

١) $\text{لو}_{٢}$ ١٥ + $\text{لو}_{٢}$ ١٤ − $\text{لو}_{٢}$ ١٠٥

المقدار = $\text{لو}_{٢} \frac{١٥ \times ١٤}{١٠٥}$ = $\text{لو}_{٢}$ ٢ = ١

٢) لو ٠.٠٠٩ − لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو ١٥$\frac{٥}{٨}$ − لو $\frac{١}{١٢}$

المقدار = لو ٠.٠٠٩ − لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $\frac{١٢٥}{٨}$ − لو $\frac{١}{١٢}$

= لو $\frac{٠.٠٠٩ \times ١٦ \times ١٢٥ \times ١٢}{٢٧ \times ٨ \times ١}$

= لو ١

= صفر

٣) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{ ١٢}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨}\text{ ١٢}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩}\text{ ١٢}}$

المقدار = $\text{لو}_{١٢}$ ٢ + $\text{لو}_{١٢}$ ٨ + $\text{لو}_{١٢}$ ٩

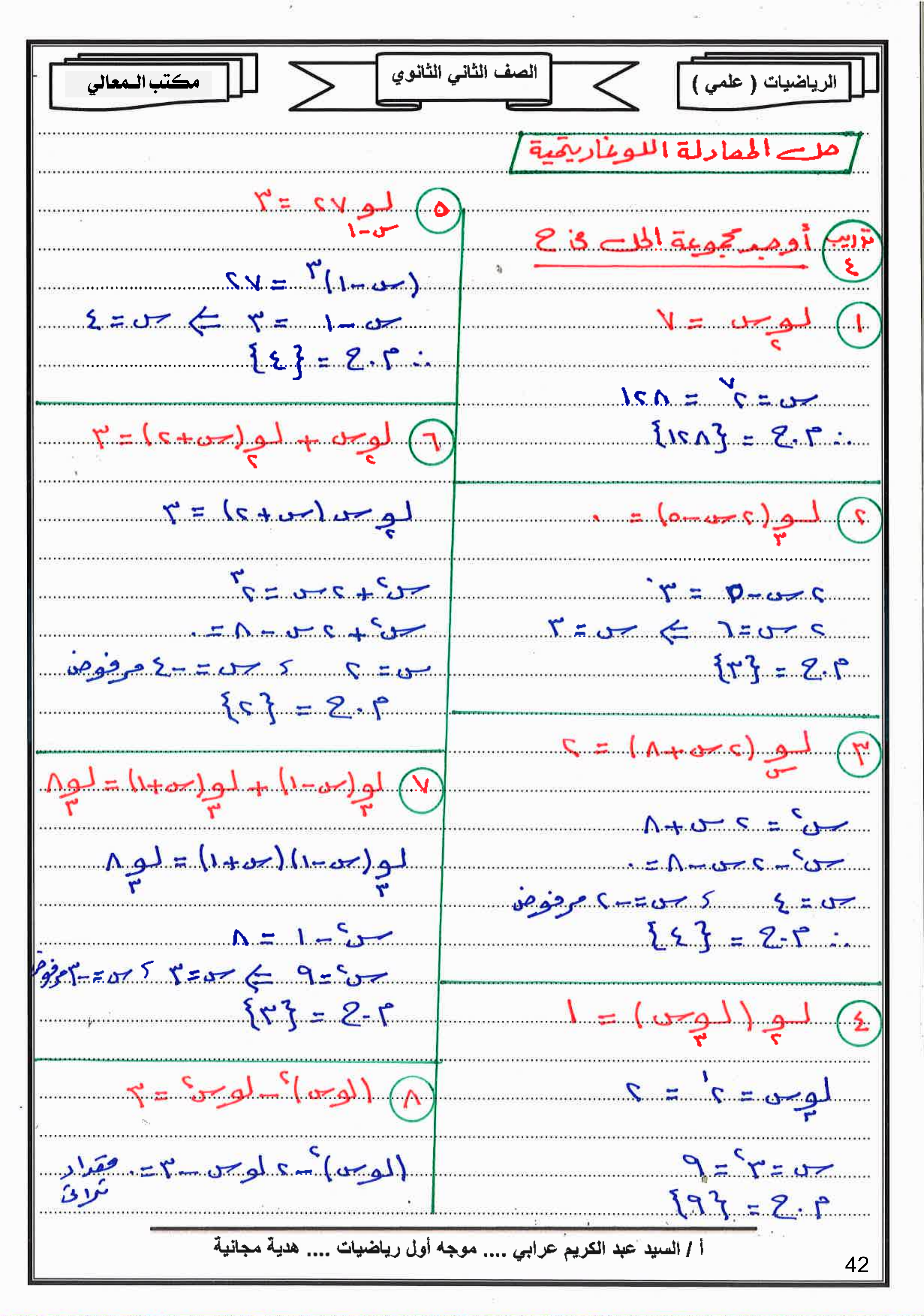
= $\text{لو}_{١٢}$ ٢×٨×٩ = $\text{لو}_{١٢}$ ١٤٤ = ٢

٤) $\text{لو}_{أبجـ}$ أ + $\text{لو}_{أبجـ}$ ب + $\text{لو}_{أبجـ}$ جـ

المقدار = $\text{لو}_{أبجـ}$ أبجـ

= ١

متعة الرياضيات في فهمها ....



حل المعادلة اللوغاريتمية

تدريب ٤: أوجد مجموعة الحل في ح

(١) $\text{لو}_{٢}\,\text{س} = ٧$

$\text{س} = ٢^{٧} = ١٢٨$

$\therefore$ م.ح = {١٢٨}

(٢) $\text{لو}_{٣}\,(٢\text{س} - ٥) = ٠$

$٢\text{س} - ٥ = ٣^{٠}$

$٢\text{س} = ٦ \Leftarrow \text{س} = ٣$

م.ح = {٣}

(٣) $\text{لو}_{\text{س}}\,(٢\text{س} + ٨) = ٢$

$\text{س}^{٢} = ٢\text{س} + ٨$

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

س = ٤ ، س = −٢ مرفوض

$\therefore$ م.ح = {٤}

(٤) $\text{لو}_{٢}\,(\text{لو}_{٣}\,\text{س}) = ١$

$\text{لو}_{٣}\,\text{س} = ٢^{١} = ٢$

$\text{س} = ٣^{٢} = ٩$

م.ح = {٩}

(٥) $\text{لو}_{\text{س}-١}\,٢٧ = ٣$

$(\text{س} - ١)^{٣} = ٢٧$

$\text{س} - ١ = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$\therefore$ م.ح = {٤}

(٦) $\text{لو}_{٢}\,\text{س} + \text{لو}_{٢}\,(\text{س}+٢) = ٣$

$\text{لو}_{٢}\,\text{س}(\text{س}+٢) = ٣$

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} = ٢^{٣}$

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨ = ٠$

س = ٢ ، س = −٤ مرفوض

م.ح = {٢}

(٧) $\text{لو}_{٣}\,(\text{س}-١) + \text{لو}_{٣}\,(\text{س}+١) = \text{لو}_{٣}\,٨$

$\text{لو}_{٣}\,(\text{س}-١)(\text{س}+١) = \text{لو}_{٣}\,٨$

$\text{س}^{٢} - ١ = ٨$

$\text{س}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{س} = ٣$ ، س = −٣ مرفوض

م.ح = {٣}

(٨) $(\text{لو}\,\text{س})^{٢} - \text{لو}\,\text{س}^{٢} = ٣$

$(\text{لو}\,\text{س})^{٢} - ٢\,\text{لو}\,\text{س} - ٣ = ٠$ مقدار ثلاثي

$(\text{لو}\ س - ٣)(\text{لو}\ س + ١) = ٠$

$\text{لو}\ س = ٣$ ، $\text{لو}\ س = -١$

$س = ١٠^{٣}$ ، $س = ١٠^{-١}$

$\text{م.ح} = \{١٠٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$

(٩) $\text{لو}_{٣}\ س + \text{لو}_{س}\ ٣ = ٢$

$\therefore \text{لو}_{٣}\ س + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\ س} = ٢ \quad \times \text{لو}_{٣}\ س$

$(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} + ١ = ٢\ \text{لو}_{٣}\ س$

$(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - ٢\ \text{لو}_{٣}\ س + ١ = ٠$

$(\text{لو}_{٣}\ س - ١)^{٢} = ٠$

$\text{لو}_{٣}\ س = ١ \Leftarrow س = ٣^{١} = ٣$

(١٠) $\text{لو}_{٤}\ س = ١ - \text{لو}_{٤}(س - ٣)$

$\text{لو}_{٤}\ س + \text{لو}_{٤}(س - ٣) = ١$

$\text{لو}_{٤}\ س(س - ٣) = ١$

$س^{٢} - ٣س = ٤$

$س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$

$س = ٤$ ، $س = -١$ مرفوض

$\text{م.ح} = \{٤\}$

تدريب ٥: إذا كان $٢^{س+١} = ٥$ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

بأخذ لو للطرفين

$\text{لو}\ ٢^{س+١} = \text{لو}\ ٥$

$(س + ١)\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥$

$س\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥$

$س\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ٢$

$س = \frac{\text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٢} \simeq ١{,}٣٢$

تدريب ٦: إذا كان $٧^{س+١} = ٣^{س-٢}$ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

$\text{لو}\ ٧^{س+١} = \text{لو}\ ٣^{س-٢}$

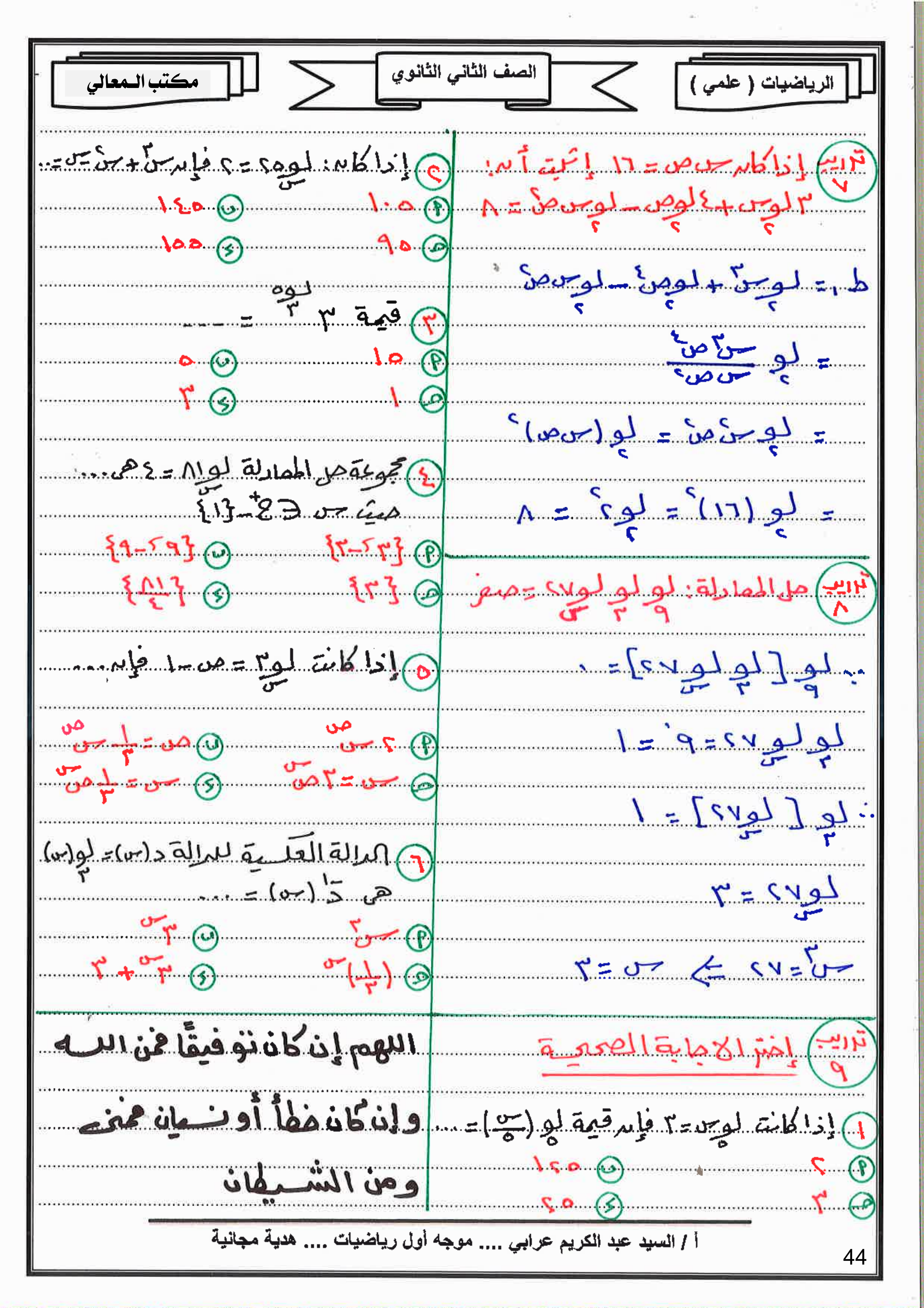
$(س + ١)\ \text{لو}\ ٧ = (س - ٢)\ \text{لو}\ ٣$

$س\ \text{لو}\ ٧ + \text{لو}\ ٧ = س\ \text{لو}\ ٣ - ٢\ \text{لو}\ ٣$

$س\ \text{لو}\ ٧ - س\ \text{لو}\ ٣ = -٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧$

$س\ (\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٣) = -٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧$

$\therefore س = \frac{-٢\ \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٣} \simeq -٤{,}٨٩$



تدريب ٧ إذا كان $س ص = ١٦$ إثبت أن:

$٣ لو_{٢} س + ٤ لو_{٢} ص - لو_{٢} س ص = ٨$

$ط.ا = لو_{٢} س^{٣} + لو_{٢} ص^{٤} - لو_{٢} س ص$

$= لو_{٢} \frac{س^{٣} ص^{٤}}{س ص}$

$= لو_{٢} س^{٢} ص^{٢} = لو_{٢} (س ص)^{٢}$

$= لو_{٢} (١٦)^{٢} = لو_{٢} ٢^{٨} = ٨$

تدريب ٨ حل المعادلة: $لو_{٩} لو_{٢} لو_{س} ٢٧ = صفر$

$\because لو_{٩} [لو_{٢} لو_{س} ٢٧] = ٠$

$لو_{٢} لو_{س} ٢٧ = ٩^{٠} = ١$

$\therefore لو_{٢} [لو_{س} ٢٧] = ١$

$لو_{س} ٢٧ = ٣$

$س^{٣} = ٢٧ \Leftarrow س = ٣$

تدريب ٩ إختر الإجابة الصحيحة

(١) إذا كانت $لو_{ه} س = ٢$ فإن قيمة $لو_{ه} (\frac{س}{ه}) = ...$

أ) ٢ ب) ١٢٥
ج) ٣ د) ٢٥

(٢) إذا كان: $لو_{س} ٥ = ٢$ فإن $س^{٣} + س^{٢} - س = ...$

أ) ١٠٥ ب) ١٤٥
ج) ٩٥ د) ١٥٥

(٣) قيمة $٣^{لو_{٣} ٥} = ...$

أ) ١٥ ب) ٥
ج) ١ د) ٣

(٤) مجموعة حل المعادلة $لو_{س} ٨١ = ٤$ هي ...... حيث $س \in ح^{+} - \{١\}$

أ) $\{٣، -٣\}$ ب) $\{٩، -٩\}$
ج) $\{٣\}$ د) $\{\frac{٨١}{٤}\}$

(٥) إذا كانت $لو_{س} ٣ = ص - ١$ فإن ......

أ) $٣ س = ص$ ب) $ص = \frac{١}{٣} س^{ص}$
ج) $س = ٣ ص^{س}$ د) $س = \frac{١}{٣} ص^{س}$

(٦) الدالة العكسية للدالة $د(س) = لو_{٣}(س)$ هي $د^{-١}(س) = ...$

أ) $س^{٣}$ ب) $٣^{س}$
ج) $(\frac{١}{٣})^{س}$ د) $٣^{س} + ٣$

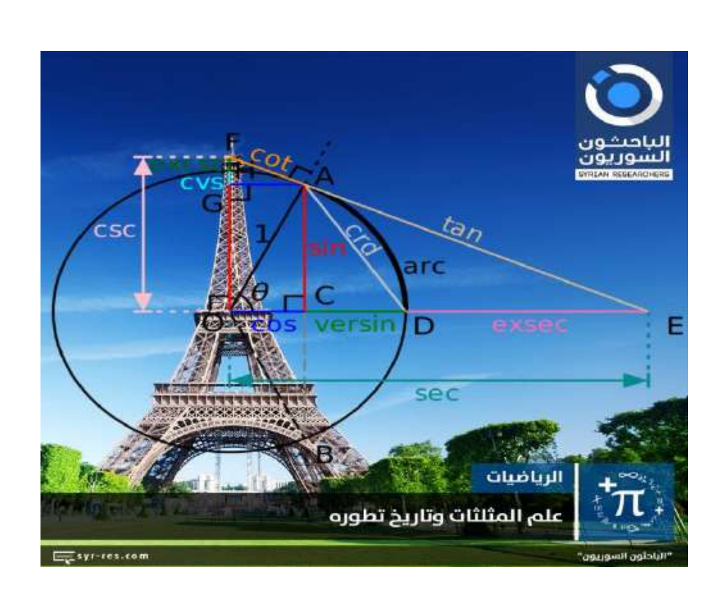
اللهم إن كان توفيقاً فمن الله
وإن كان خطأ أو نسيان فمني ومن الشيطان

ثانياً :

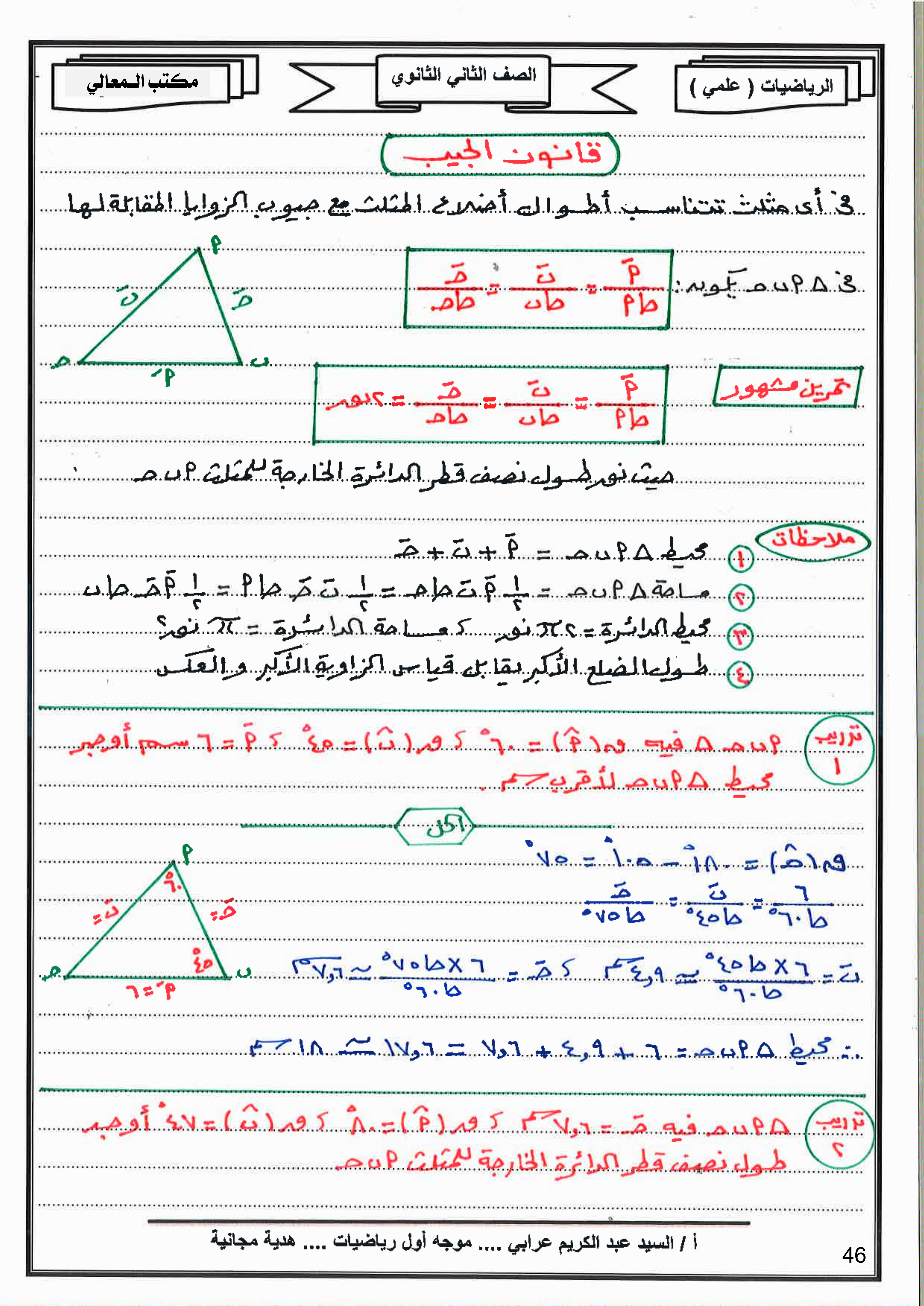
حساب المثلثات

(١) قانون الجيب

(٢) قانون جيب التمام







قانون الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

في △ أ ب جـ يكون:

$$\frac{أ}{جا\,أ} = \frac{ب}{جا\,ب} = \frac{جـ}{جا\,جـ}$$

تمرين مشهور

$$\frac{أ}{جا\,أ} = \frac{ب}{جا\,ب} = \frac{جـ}{جا\,جـ} = ٢\,نق$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

ملاحظات

١) محيط △ أ ب جـ = أ + ب + جـ

٢) مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب

٣) محيط الدائرة = ٢ π نق ، مساحة الدائرة = π نق^2

٤) طول الضلع الأكبر يقابل قياس الزاوية الأكبر والعكس

تدريب ١

أ ب جـ △ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° ، أ = ٦ سم أوجد محيط △ أ ب جـ لأقرب سم.

الحل

ق(∠جـ) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

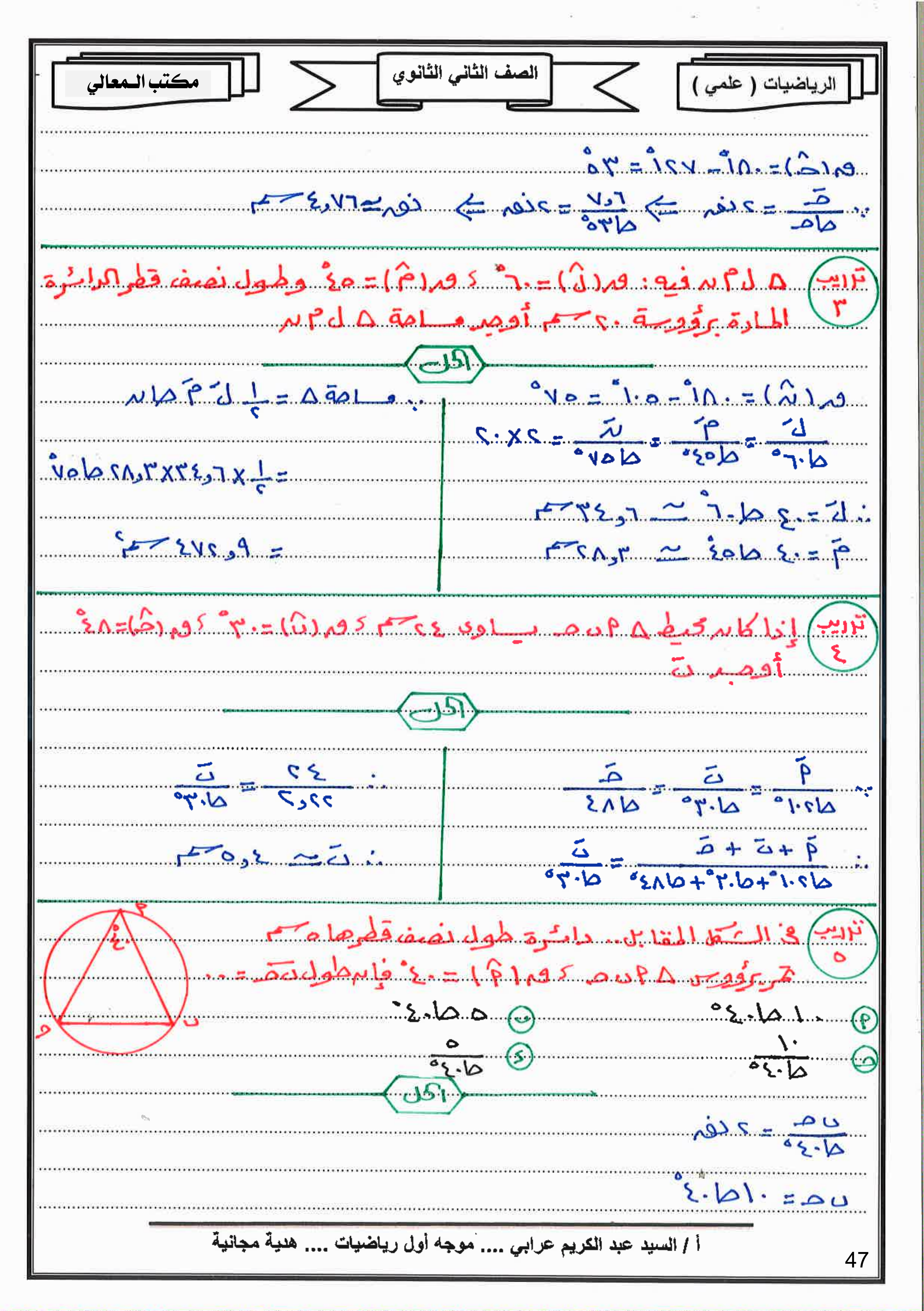
$$\frac{٦}{جا\,٦٠°} = \frac{ب}{جا\,٤٥°} = \frac{جـ}{جا\,٧٥°}$$

ب = $\frac{٦ \times جا\,٤٥°}{جا\,٦٠°}$ ≃ ٤,٩ سم ، جـ = $\frac{٦ \times جا\,٧٥°}{جا\,٦٠°}$ ≃ ٦,٧ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٤,٩ + ٦,٧ = ١٧,٦ ≃ ١٨ سم

تدريب ٢

△ أ ب جـ فيه جـ = ٦,٧ سم ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٧° أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ.



ق(ص^) = ١٨٠° − ١٢٧° = ٥٣°

∵ ص / جا ص = ٢ نق ⟸ ٧٫٦ / جا ٥٣° = ٢ نق ⟸ نق ≈ ٤٫٧٦ سم

تدريب ٣

Δ ل م ن فيه: ق(ل^) = ٦٠° ، ق(م^) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد مساحة Δ ل م ن

الحل

ق(ن^) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

ل / جا ٦٠° = م / جا ٤٥° = ن / جا ٧٥° = ٢ × ٢٠

∴ ل = ٤٠ جا ٦٠° ≈ ٣٤٫٦ سم

م = ٤٠ جا ٤٥° ≈ ٢٨٫٣ سم

∵ مساحة Δ = ½ ل م جا ن

= ½ × ٣٤٫٦ × ٢٨٫٣ جا ٧٥°

= ٤٧٢٫٩ سم²

تدريب ٤

إذا كان محيط Δ أ ب جـ يساوي ٢٤ سم ، ق(ب^) = ٣٠° ، ق(جـ^) = ٤٨° أوجد ب

الحل

∵ أ / جا ١٠٢° = ب / جا ٣٠° = جـ / جا ٤٨°

∴ (أ + ب + جـ) / (جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°) = ب / جا ٣٠°

∴ ٢٤ / ٢٫٢٢ = ب / جا ٣٠°

∴ ب ≈ ٥٫٤ سم

تدريب ٥

في الشكل المقابل ... دائرة طول نصف قطرها ٥ سم مرسومة برؤوس Δ أ ب جـ ، ق(أ^) = ٤٠° فإن طول ب جـ = ...

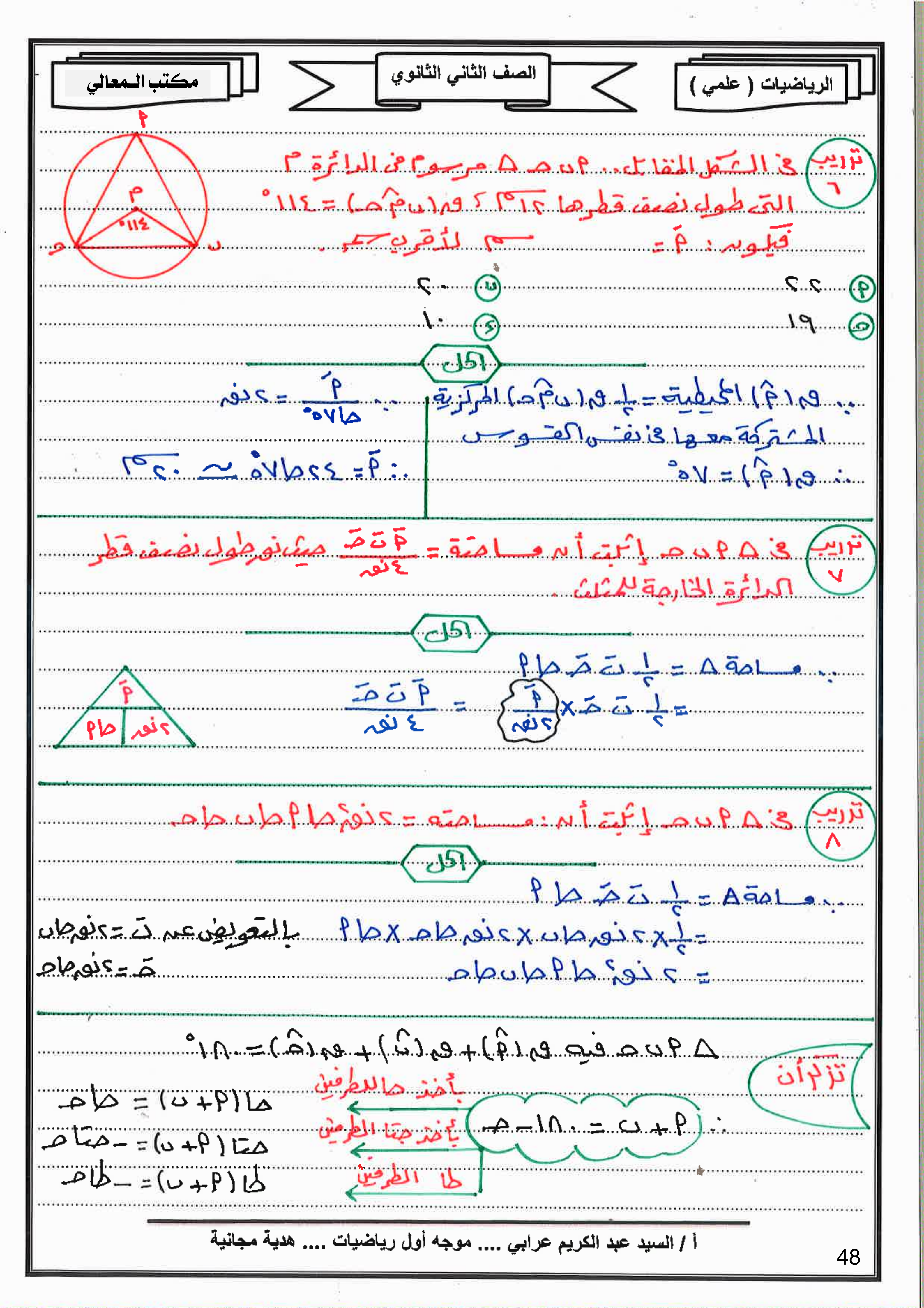
(أ) ١٠ جا ٤٠° (ب) ٥ جا ٤٠°

(جـ) ١٠ / جا ٤٠° (د) ٥ / جا ٤٠°

الحل

ب جـ / جا ٤٠° = ٢ نق

ب جـ = ١٠ جا ٤٠°



تدريب ٦

في الشكل المقابل: $\triangle$ أ ب جـ مرسوم في الدائرة م التي طول نصف قطرها ١٢ سم، ق(∠ب م جـ) = ١١٤°

فإن: أ = ... سم لأقرب عدد صحيح

(أ) ٢٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٩ (د) ١٠

الحل

∵ ق(∠أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠أ) = ٥٧°

∵ $\frac{أ}{جا ٥٧°}$ = ٢نق

∴ أ = ٢٤ جا ٥٧° ≃ ٢٠ سم

تدريب ٧

في $\triangle$ أ ب جـ إثبت أن مساحته = $\frac{أ\ ب\ جـ}{٤ نق}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

الحل

∵ مساحة $\triangle$ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × $\frac{أ}{٢نق}$ = $\frac{أ\ ب\ جـ}{٤ نق}$

تدريب ٨

في $\triangle$ أ ب جـ إثبت أن: مساحته = ٢نق² جا أ جا ب جا جـ

الحل

∵ مساحة $\triangle$ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ٢نق جا ب × ٢نق جا جـ × جا أ

بالتعويض عن ب = ٢نق جا ب ، جـ = ٢نق جا جـ

= ٢نق² جا أ جا ب جا جـ

تذكر أن

$\triangle$ أ ب جـ فيه ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∵ أ + ب = ١٨٠° − جـ

بأخذ جا للطرفين: جا(أ + ب) = جا جـ

بأخذ جتا الطرفين: جتا(أ + ب) = − جتا جـ

ظا الطرفين: ظا(أ + ب) = − ظا جـ

تدريب ٩

إختر الإجابة الصحيحة :-

(١) فى الشكل المقابل...

المثلث أ ب جـ فيه: ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠ب) = ٤٨° ، أ جـ = ٨ سم فيكون بَ = ... سم للقريب سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١١

(٢) فى Δ أ ب جـ أى من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) أَ جا ب = بَ جا أ (ب) أَ = بَ جا جـ

(جـ) جا أ + جا ب = أَ + بَ (د) $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{جا ب}{بَ}$

(٣) إذا كان: نق = طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ فإن: نق جا أ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ أَ (ب) ٢ أَ (جـ) أَ (د) ٤ أَ

(٤) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ وكان أَ = $\frac{1}{2}$ نق فإن ق(∠أ) = ...

(أ) جا⁻¹ (١) (ب) جا⁻¹ (٢) (جـ) جا⁻¹ ($\frac{1}{4}$) (د) جا⁻¹ ($\frac{1}{2}$)

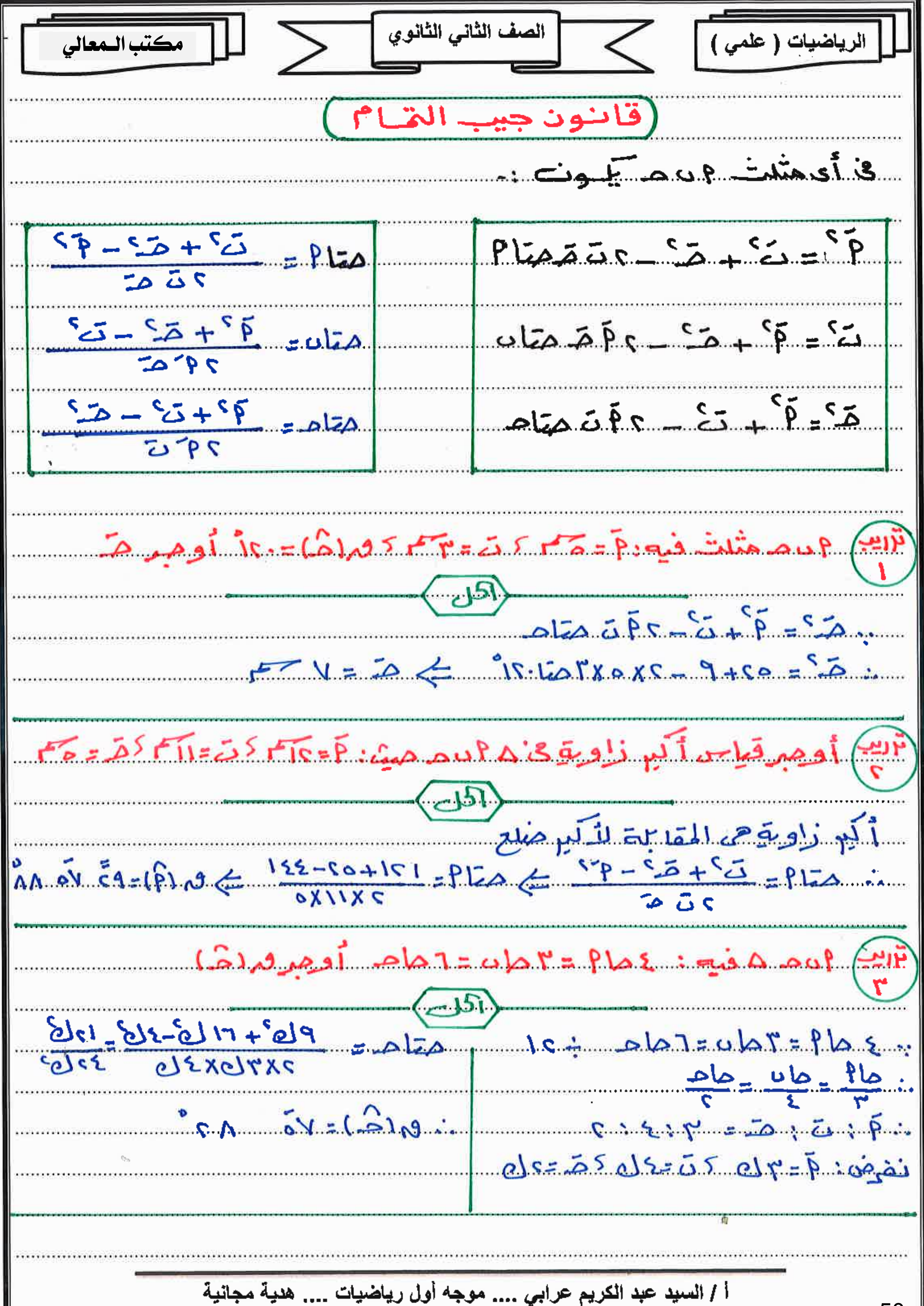
(٥) فى Δ أ ب جـ إذا كان أَ جا أ = بَ جا ب فإن: ......

(أ) ∠أ منفرجة (ب) أَ = بَ (جـ) ق(∠أ) = ٩٠° (د) بَ = جَ

(٦) إذا كان: أ ب جـ مثلث فيه: جتا (ب + جـ) = $\frac{3}{5}$ ، ب جـ = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

الرياضيات : غذاء العقل



قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب حـ يكون :

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\ \text{جتا أ}$$

$$\text{ب}^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{حـ}\ \text{جتا ب}$$

$$\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{ب}\ \text{جتا حـ}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{حـ}}$$

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ}\,\text{حـ}}$$

$$\text{جتا حـ} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$$

تدريب ١ أ ب حـ مثلث فيه: أ = ٥ سم ، ب = ٣ سم ، ق(∠حـ) = ١٢٠° أوجد حـ

الحل

∵ $\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{ب}\ \text{جتا حـ}$

∴ $\text{حـ}^2 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3\ \text{جتا}\ 120^\circ$ ⟸ حـ = ٧ سم

تدريب ٢ أوجد قياس أكبر زاوية في Δ أ ب حـ حيث: أ = ١٢ سم ، ب = ١١ سم ، حـ = ٥ سم

الحل

أكبر زاوية هي المقابلة لأكبر ضلع

∴ $\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{حـ}}$ ⟸ $\text{جتا أ} = \frac{121 + 25 - 144}{2 \times 11 \times 5}$ ⟸ ق(∠أ) = ٨٨° ٥٧َ ٢٩ً

تدريب ٣ أ ب حـ Δ فيه : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ أوجد ق(∠حـ)

الحل

∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ ÷ ١٢

∴ $\frac{\text{جا أ}}{3} = \frac{\text{جا ب}}{4} = \frac{\text{جا حـ}}{2}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٢

نفرض: أ = ٣ ل ، ب = ٤ ل ، حـ = ٢ ل

$\text{جتا حـ} = \frac{9\text{ل}^2 + 16\text{ل}^2 - 4\text{ل}^2}{2 \times 3\text{ل} \times 4\text{ل}} = \frac{21\text{ل}^2}{24\text{ل}^2}$

∴ ق(∠حـ) = ٢٨° ٥٧َ

تدريب ٤

أ ب جـ Δ مساحته = $٥\sqrt{٣}$ سم² وفيه: أ = ٤سم ، ق(ب̂) = ٦٠° أوجد ب

الحل

∵ م(Δ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أ جـ جا ب

∴ $٥\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × جـ جا ٦٠

$٥\sqrt{٣}$ = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ

∴ جـ = ٥ سم

∵ ب² = أ² + جـ² − ٢ أ جـ جتا ب

= ١٦ + ٢٥ − ٢ × ٤ × ٥ جتا ٦٠°

∴ ب = ٤٫٦ سم

تدريب ٥

في الشكل المقابل..

أ ب جـ د شكل رباعي فيه: أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٥سم

جـ د = ٨سم ، أ د = ٩سم

إثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري.

الحل

في Δ أ ب جـ

جتا ب = $\frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٥}$ = $-\frac{١}{٦}$

في Δ أ جـ د

جتا د = $\frac{(٩)^٢ + (٨)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

∵ جتا د = − جتا ب ⟸ ق(د̂) + ق(ب̂) = ١٨٠°

⟸ ∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

إفتكر معايا

يكون الشكل رباعي دائري إذا كان فيه:

١) زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة متساويتان

٢) زاويتان متقابلتان متكاملتان.

إفتكر معايا

عند حل المثلث فإننا نوجد جميع عناصر المثلث [٣ زوايا + ٣ أضلاع]

تدريب ٦

أ ب جـ Δ فيه: ب = $٢\frac{١}{٢}$سم ، جـ = ٢سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ إثبت أن Δ متساوي الساقين

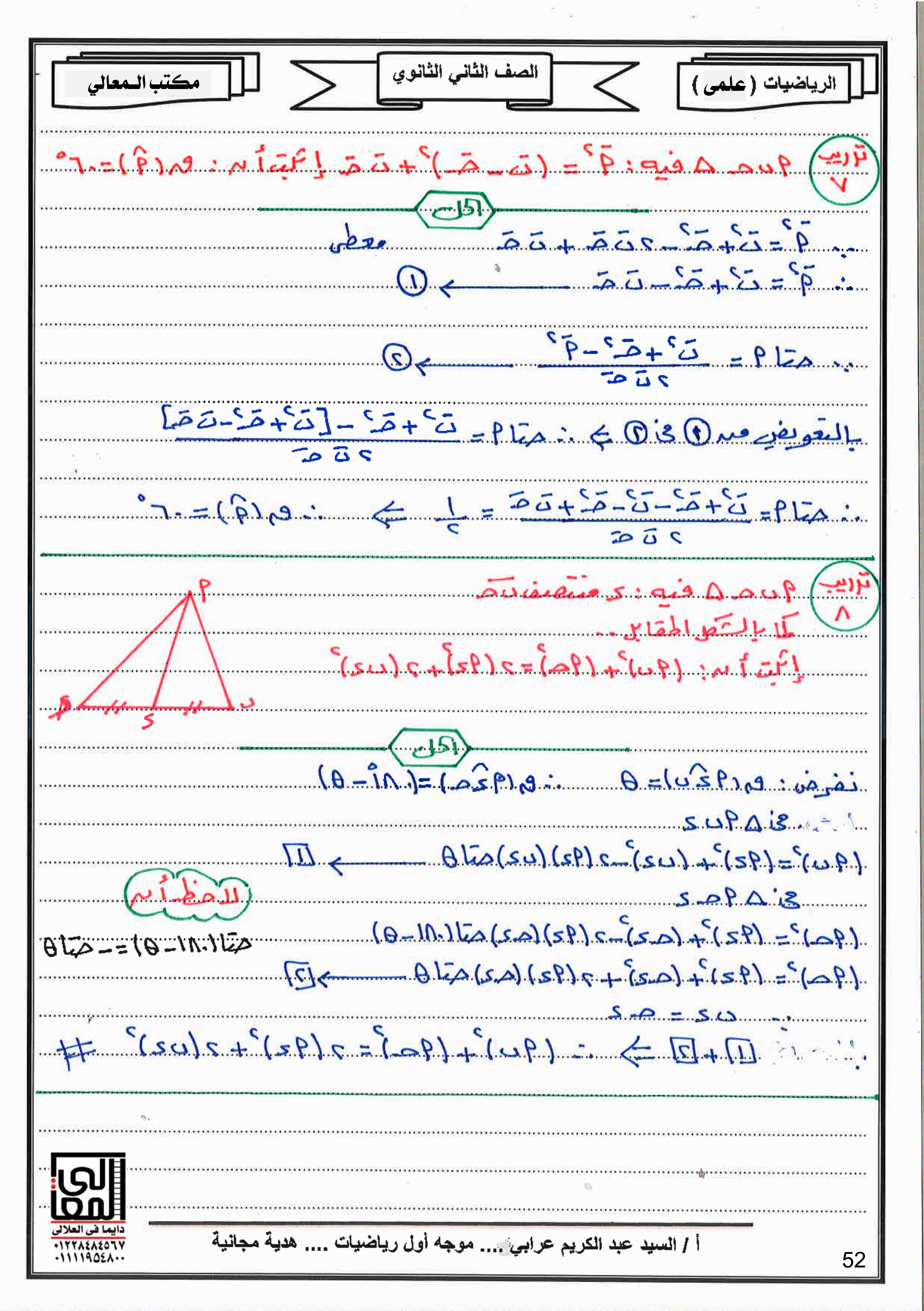
الحل

∵ أ² = ب² + جـ² − ٢ ب جـ جتا أ

= ٦٫٢٥ + ٤ − ٢ × ٢٫٥ × ٢ × $\frac{٢}{٥}$

∴ أ = ٢٫٥ سم

∵ أ = ب ∴ Δ متساوي الساقين



تدريب 7

أ ب جـ Δ فيه: $أ^2 = (ب - جـ)^2 + ب\,جـ$ ، أثبت أن: ق$(\hat{أ}) = 60°$

الحل

$\because أ^2 = ب^2 + جـ^2 - 2\,ب\,جـ + ب\,جـ$ معطى

$\therefore أ^2 = ب^2 + جـ^2 - ب\,جـ \longleftarrow (1)$

$\because$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2\,ب\,جـ} \longleftarrow (2)$

بالتعويض من (1) في (2) $\Leftarrow$ $\therefore$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + جـ^2 - [ب^2 + جـ^2 - ب\,جـ]}{2\,ب\,جـ}$

$\therefore$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + جـ^2 - ب^2 - جـ^2 + ب\,جـ}{2\,ب\,جـ} = \dfrac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $\therefore$ ق$(\hat{أ}) = 60°$

تدريب 8

أ ب جـ Δ فيه: د منتصف $\overline{ب جـ}$ كما بالشكل المقابل..

أثبت أن: $(أب)^2 + (أجـ)^2 = 2(أد)^2 + 2(بد)^2$

الحل

نفرض: ق$(\angle أدب) = \theta$ $\therefore$ ق$(\angle أدجـ) = (180° - \theta)$

في Δ أ ب د

$(أب)^2 = (أد)^2 + (بد)^2 - 2(أد)(بد)$ جتا $\theta \longleftarrow [1]$

في Δ أ جـ د

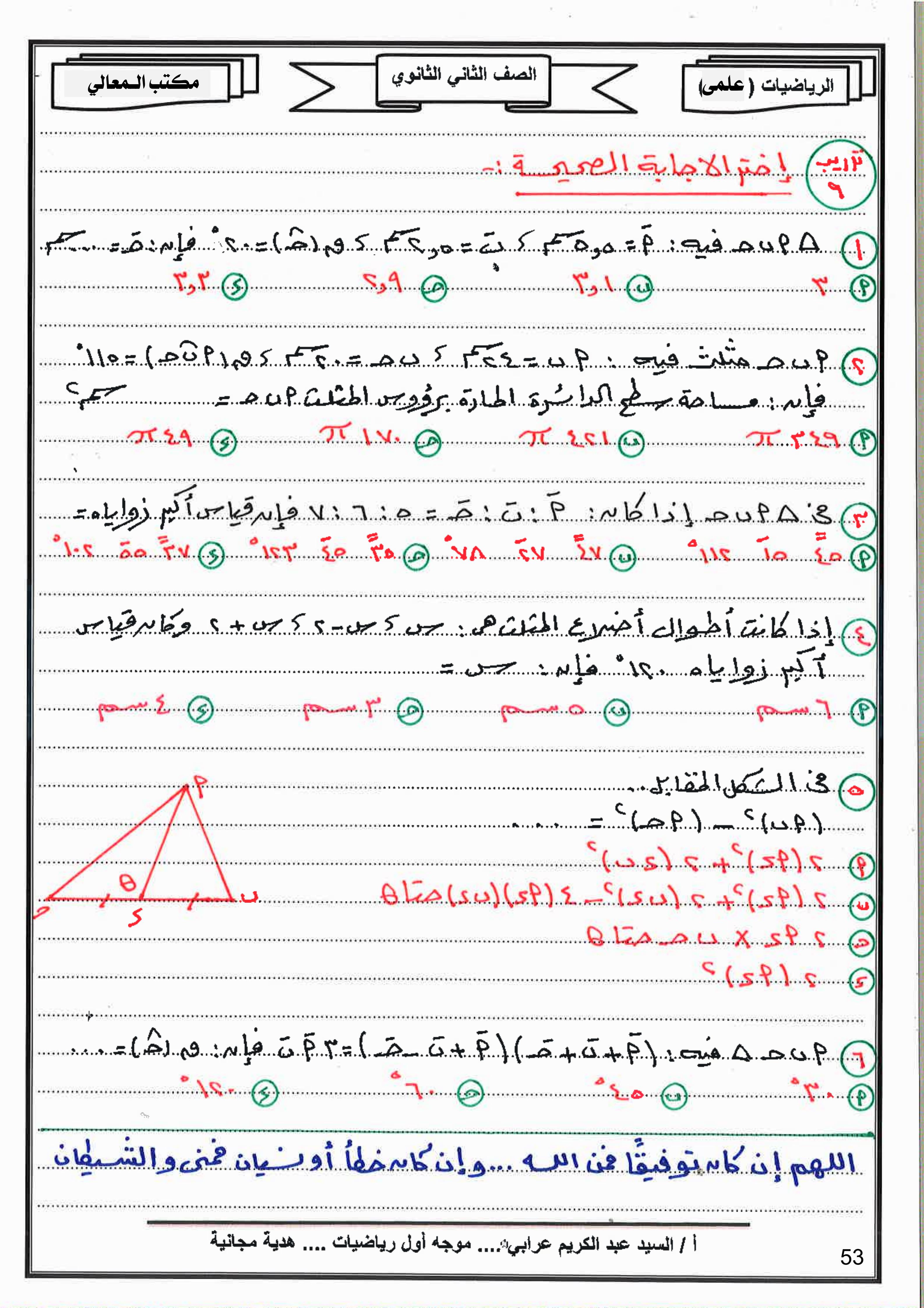
$(أجـ)^2 = (أد)^2 + (جـد)^2 - 2(أد)(جـد)$ جتا $(180 - \theta)$

$(أجـ)^2 = (أد)^2 + (جـد)^2 + 2(أد)(جـد)$ جتا $\theta \longleftarrow [2]$

لاحظ أن: جتا$(180 - \theta) = -$ جتا θ

$\because بد = جـد$

$[1] + [2] \Leftarrow \therefore (أب)^2 + (أجـ)^2 = 2(أد)^2 + 2(بد)^2$ #



تدريب ٩

إختر الإجابة الصحيحة:

١) △ أ ب جـ فيه: أ = ٥,٥ سم ، ب = ٥,٢ سم ، ق(جـ^) = ٢٠° فإن: جـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٣,١ (جـ) ٢,٩ (د) ٣,٢

٢) أ ب جـ مثلث فيه: أ ب = ٢٤ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ق(أ ب^ جـ) = ١١٥° فإن: مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ = ... سم²

(أ) ٣٤٩ π (ب) ٤٢١ π (جـ) ١٧٠ π (د) ٤٩ π

٣) في △ أ ب جـ إذا كان: أ : ب : جـ = ٥ : ٦ : ٧ فإن قياس أكبر زواياه = ...

(أ) ١١٢° ٢٥َ ٤٥ً (ب) ٧٨° ٢٧َ ٤٧ً (جـ) ١٢٣° ٤٥َ ٣٥ً (د) ١٠٢° ٥٥َ ٣٧ً

٤) إذا كانت أطوال أضلاع المثلث هي: س ، س − ٢ ، س + ٢ وكان قياس أكبر زواياه ١٢٠° فإن: س = ...

(أ) ٦ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

٥) في الشكل المقابل:

(أ ب)² − (أ جـ)² = ...

(أ) ٢(أ د)² + ٢(د ب)²

(ب) ٢(أ د)² + ٢(ب د)² − ٤(أ د)(ب د) جتا θ

(جـ) ٢ أ د × ب جـ جتا θ

(د) ٢(أ د)²

٦) أ ب جـ △ فيه: (أ + ب + جـ)(أ + ب − جـ) = ٣ أ ب فإن: ق(جـ^) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

اللهم إن كان توفيقاً فمن الله ... وإن كان خطأً أو نسيان فمني والشيطان

ثالثاً :

التفاضل



مفرمات فى النهايات

الرموز ∞ ، -∞

إذا كان $a \in R$

∞ يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن تخيلة [ليس عددًا حقيقيًا]

-∞ يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

(١) $\infty \pm a = \infty$ (٢) $-\infty \pm a = -\infty$

(٣) $\infty \times a = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$ (٤) $\infty \div a = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$

أنواع الكميات

الكمية المعينة: هى كمية لها ناتج محدد. مثل: ٣ ، $\frac{1}{4}$ ، صفر ، ...

الكمية الغير معينة: هى كمية ليس لها ناتج محدد. $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، ...

الكمية الغير معرفة: هى كمية ليس لها معنى. $\frac{a}{0}$ حيث $a \in R - \{0\}$

تدريب ١

(١) $7 + \infty =$ (٢) $\infty + \infty =$ (٣) $9 \times \infty =$

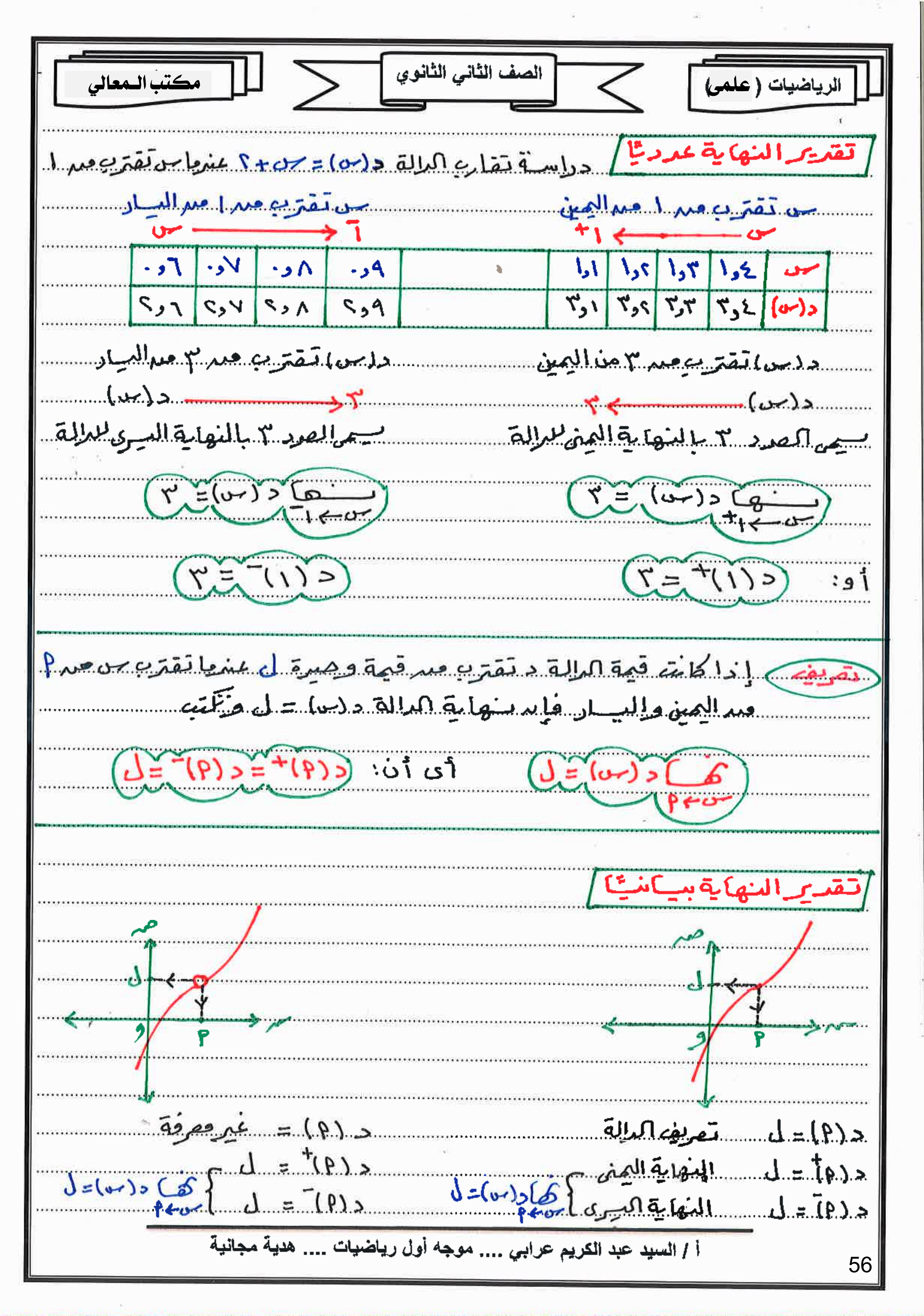
(٤) $-4 \times -\infty =$ (٥) $5 - \infty =$ (٦) $\infty \times 0 =$

نهاية دالة عند نقطة

مثال توضيحي

إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ واضح أن مجال $f = R - \{2\}$ يعنى $f(2) = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة يعنى لا يمكن تعيين قيمة للدالة عند $x = 2$ لذلك سوف نقوم دراسة إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت x من العدد ٢

ولدراسة هذا التقارب يوجد طريقتين: جبرية و بيانية



تقدير النهاية عدديًا

دراسة تقارب الدالة د(س) = س + ٢ عندما س تقترب من ١

س تقترب من ١ من اليمين $\leftarrow$ ١⁺ ... س تقترب من ١ من اليسار $\rightarrow$ ١⁻

س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٣,٤	٣,٣	٣,٢	٣,١		٢,٩	٢,٨	٢,٧	٢,٦

د(س) تقترب من ٣ من اليمين ؛ د(س) $\leftarrow$ ٣

د(س) تقترب من ٣ من اليسار ؛ د(س) $\rightarrow$ ٣

يسمى العدد ٣ بالنهاية اليمنى للدالة ؛ يسمى العدد ٣ بالنهاية اليسرى للدالة

$$\lim_{س \to 1^{+}} د(س) = 3 \qquad \lim_{س \to 1^{-}} د(س) = 3$$

أو: $د(1^{+}) = 3$ ، $د(1^{-}) = 3$

تعريف: إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من اليمين واليسار فإن نهاية الدالة د(س) = ل ونكتب

$$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$$

أى أن: $د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$

تقدير النهاية بيانيًا

د(أ) = ل تعريف الدالة

د(أ⁺) = ل النهاية اليمنى

د(أ⁻) = ل النهاية اليسرى

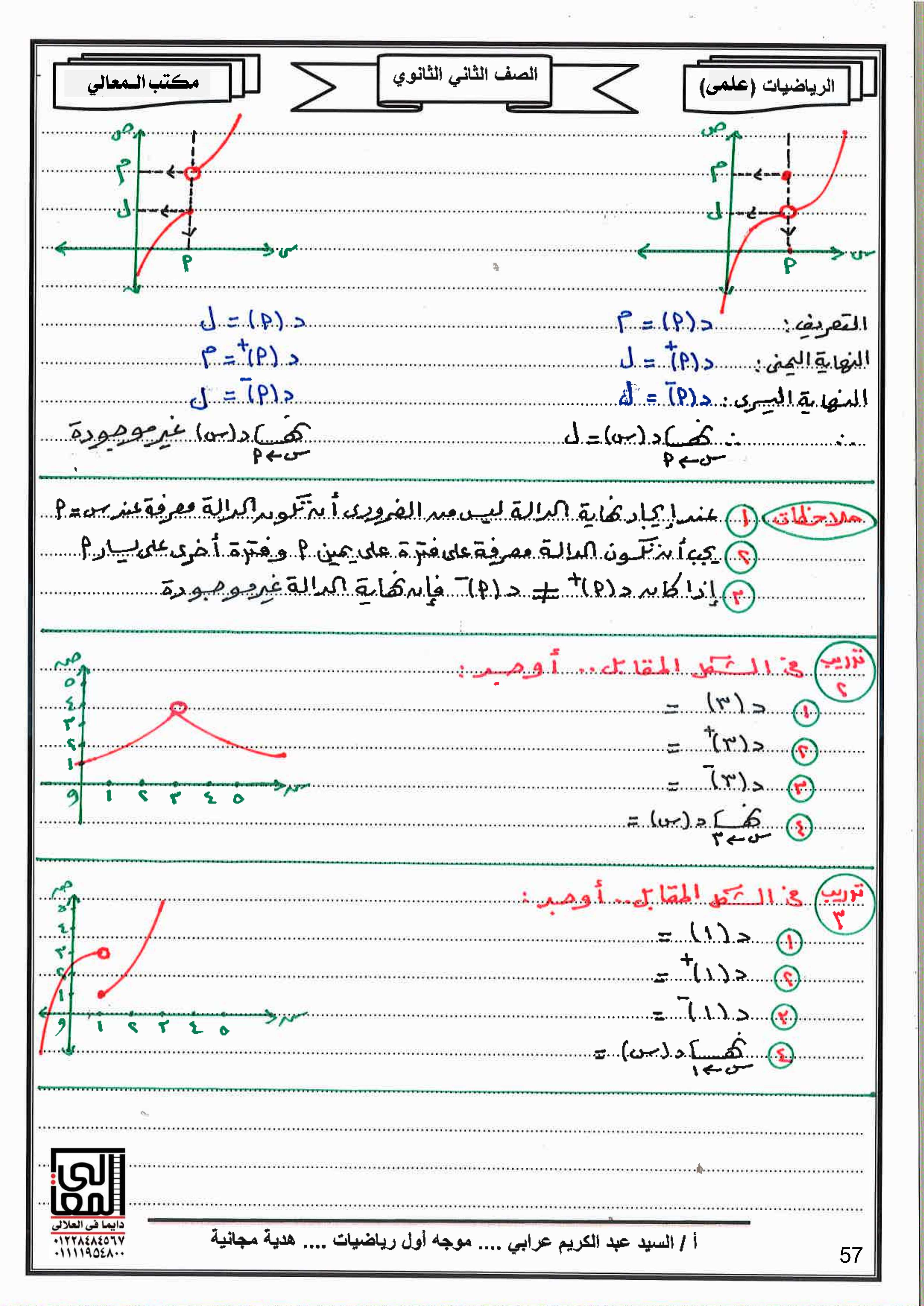
$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$

د(أ) = غير معرفة

د(أ⁺) = ل

د(أ⁻) = ل

$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$



التعريف: $د(أ) = م$

النهاية اليمنى: $د(أ^+) = ل$

النهاية اليسرى: $د(أ^-) = ل$

$\underset{س \to أ}{نها} د(س) = ل$

$د(أ) = ل$

$د(أ^+) = م$

$د(أ^-) = ل$

$\underset{س \to أ}{نها} د(س)$ غير موجودة

ملاحظات

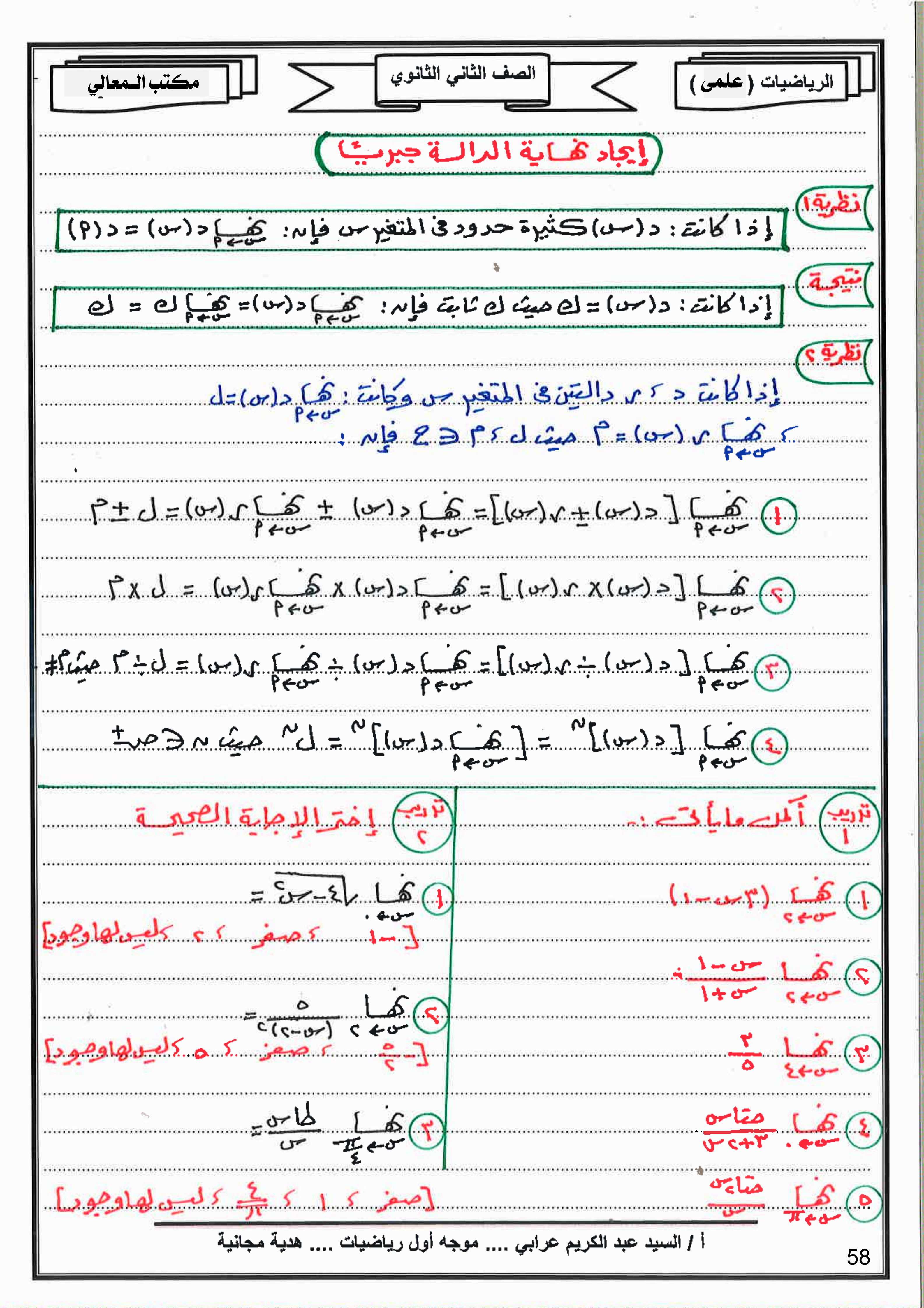
1. عند إيجاد نهاية الدالة ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند $س = أ$
2. يجب أن تكون الدالة معرفة على فترة على يمين أ وفترة أخرى على يسار أ
3. إذا كان $د(أ^+) \neq د(أ^-)$ فإن نهاية الدالة غير موجودة

تدريب ٢ في الشكل المقابل .. أوجد:

1. $د(٣) =$
2. $د(٣^+) =$
3. $د(٣^-) =$
4. $\underset{س \to ٣}{نها} د(س) =$

تدريب ٣ في الشكل المقابل .. أوجد:

1. $د(١) =$
2. $د(١^+) =$
3. $د(١^-) =$
4. $\underset{س \to ١}{نها} د(س) =$



إيجاد نهاية الدالة جبريًا

نظرية ١: إذا كانت: د(س) كثيرة حدود في المتغير س فإن: $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) = د(أ)$

نتيجة: إذا كانت: د(س) = ل حيث ل ثابتة فإن: $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) = \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ل = ل$

نظرية ٢: إذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكانت: $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) = ل$ ، $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ر(س) = م$ حيث ل ، م ∈ ح فإن:

١) $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ [د(س) \pm ر(س)] = \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) \pm \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ر(س) = ل \pm م$

٢) $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ [د(س) \times ر(س)] = \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) \times \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ر(س) = ل \times م$

٣) $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ [د(س) \div ر(س)] = \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) \div \underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ر(س) = ل \div م$ حيث م ≠ ٠

٤) $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ [د(س)]^{ن} = [\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ حيث ن ∈ ص+

تدريب ١: أكمل ما يأتي:

١) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ (٣س - ١)$

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س - ١}{س + ١} =$

٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{٣}{٥}$

٤) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}س}{٣ + ٢س}$

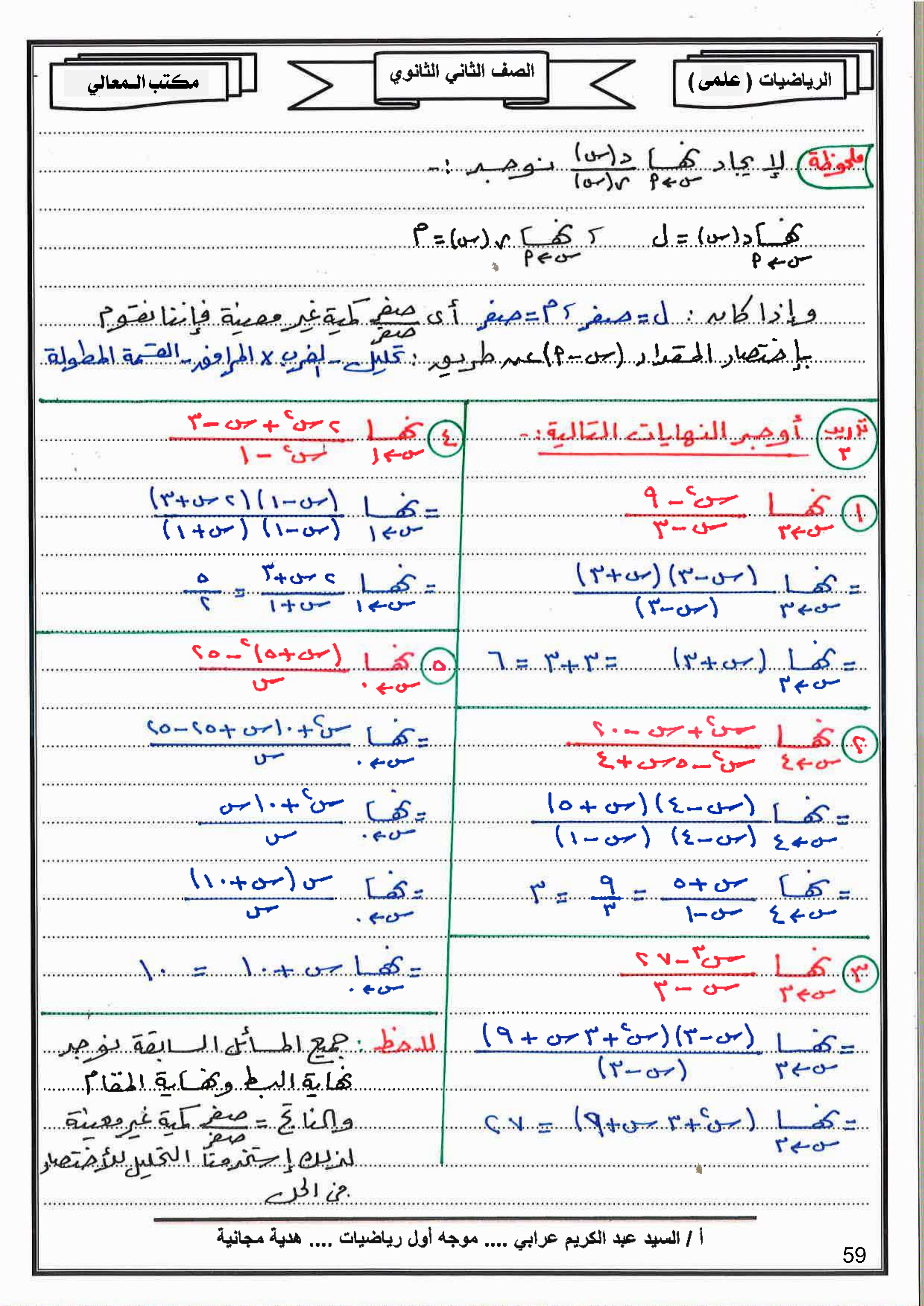
٥) $\underset{س\to \pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}٢س}{س}$

تدريب ٢: اختر الإجابة الصحيحة

١) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \sqrt{٤ - س^{٢}} =$ [−١ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود]

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{٥}{(س - ٢)^{٢}} =$ [$-\frac{٥}{٢}$ ، صفر ، ٥ ، ليس لها وجود]

٣) $\underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{طا}س}{س} =$ [صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، ليس لها وجود]



ملحوظة لإيجاد $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ نوجد :-

$\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \text{ر(س)} = \text{م}$

وإذا كانت : ل = صفر ، م = صفر أى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة فإننا نقوم باختصار المقدار (س − أ) عن طريق : تحليل - الضرب × المرافق - القسمة المطولة

تدريب ٣ أوجد النهايات التالية :-

(١) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} (\text{س} + 3) = 3 + 3 = 6$

(٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 20}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 4}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{(\text{س} - 4)(\text{س} + 5)}{(\text{س} - 4)(\text{س} - 1)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س} + 5}{\text{س} - 1} = \frac{9}{3} = 3$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س} - 3}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س}^2 + 3\text{س} + 9)}{(\text{س} - 3)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} (\text{س}^2 + 3\text{س} + 9) = 27$

(٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{2\text{س}^2 + \text{س} - 3}{\text{س}^2 - 1}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س} - 1)(2\text{س} + 3)}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{2\text{س} + 3}{\text{س} + 1} = \frac{5}{2}$

(٥) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س} + 5)^2 - 25}{\text{س}}$

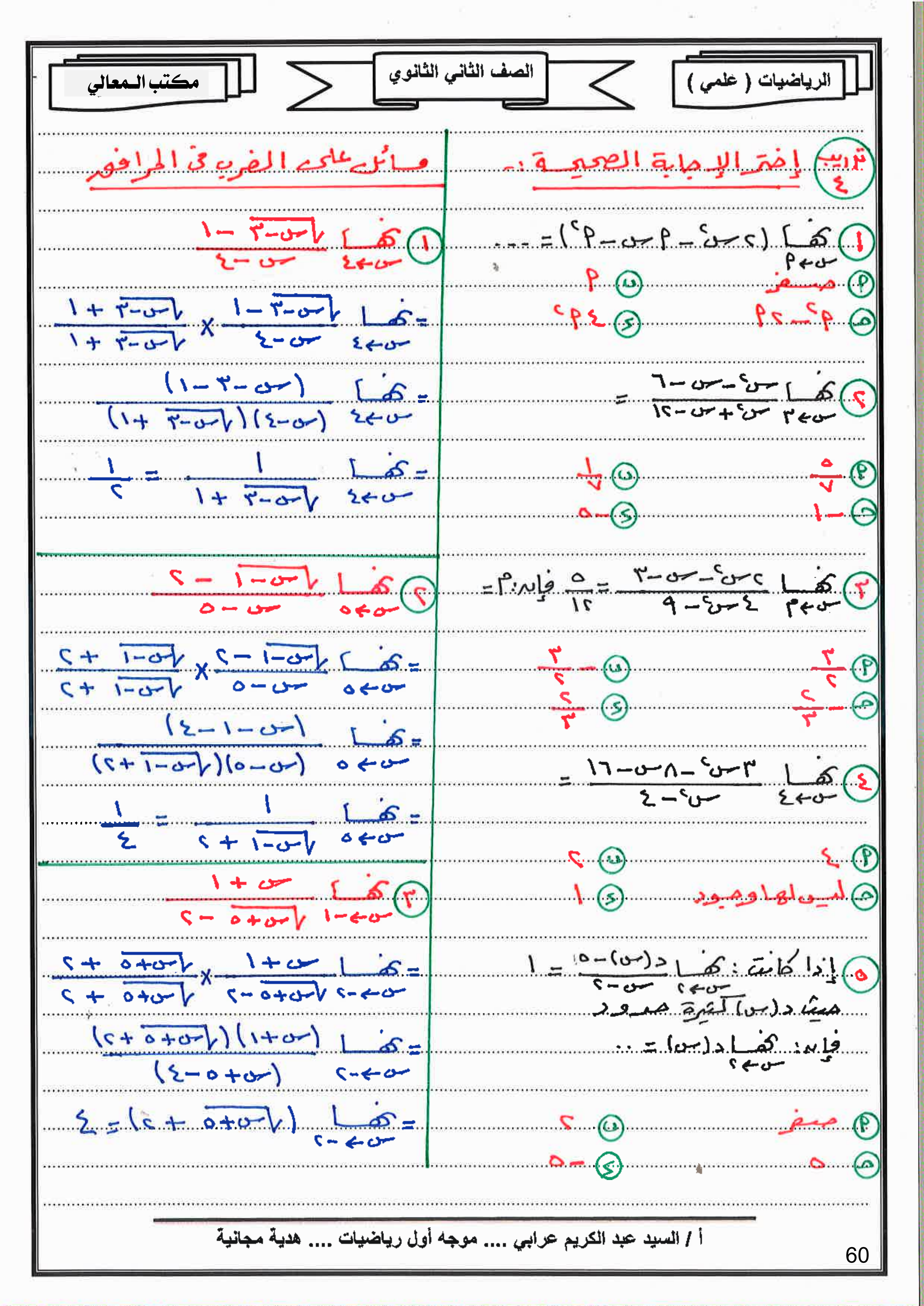
$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2 + 10\text{س} + 25 - 25}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2 + 10\text{س}}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}(\text{س} + 10)}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{س} + 10 = 10$

لاحظ : جميع المسائل السابقة نوجد نهاية البسط ونهاية المقام والناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة لذلك إستخدمنا التحليل للإختصار في الحل.



تدريب ٤ — إختر الإجابة الصحيحة :-

① $\lim_{س \to أ} (٢س^٢ - أس - أ^٢) = \dots$

(أ) صفر (ب) أ (ج) $أ^٢ - ٢أ$ (د) $٤أ^٢$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢} =$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (ج) -١ (د) -٥

③ $\lim_{س \to م} \frac{٢س^٢ - س - ٣}{٤س^٢ - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن: م =

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

④ $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^٢ - ٨س - ١٦}{س^٢ - ٤} =$

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ليس لها وجود (د) ١

⑤ إذا كانت: $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ حيث د(س) كثيرة حدود فإن: $\lim_{س \to ٢} د(س) = \dots$

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٥ (د) -٥

مسائل على الضرب في المرافق

① $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س-٣} + ١}{\sqrt{س-٣} + ١}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٣ - ١)}{(س-٤)(\sqrt{س-٣} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س-٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

② $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س-١} + ٢}{\sqrt{س-١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ١ - ٤)}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$

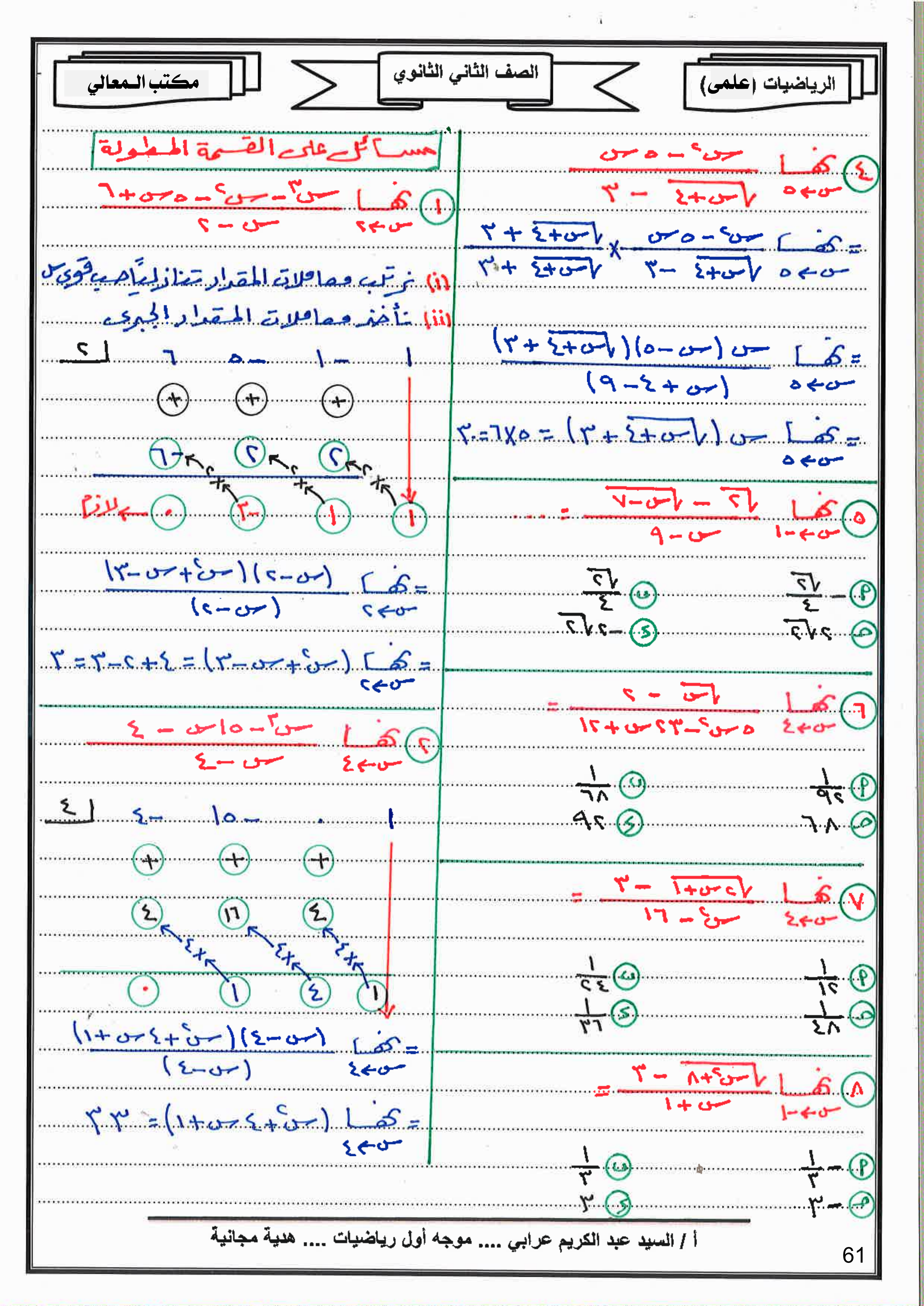
$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س-١} + ٢} = \frac{١}{٤}$

③ $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٥} + ٢}{\sqrt{س+٥} + ٢}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{(س+١)(\sqrt{س+٥} + ٢)}{(س + ٥ - ٤)}$

$= \lim_{س \to -١} (\sqrt{س+٥} + ٢) = ٤$



(٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٣}{\sqrt{س+٤} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}{(س+٤-٩)}$

$= \lim_{س \to ٥} س(\sqrt{س+٤}+٣) = ٥ \times ٦ = ٣٠$

(٥) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{س-٧}}{س-٩} = ...$

(أ) $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (ج) $٢\sqrt{٢}$ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{٥س^٢ - ٢٣س + ١٢} =$

(أ) $\frac{١}{٩٢}$ (ب) $\frac{١}{٦٨}$ (ج) ٦٨ (د) ٩٢

(٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢س+١} - ٣}{س^٢ - ١٦} =$

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٢٤}$ (ج) $\frac{١}{٤٨}$ (د) $\frac{١}{٣٦}$

(٨) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^٢+٨} - ٣}{س+١} =$

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) -٣ (د) ٣

حساب النهاية على القسمة المطولة

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

(i) نرتب معاملات المقدار تنازلياً حسب قوى س

(ii) نأخذ معاملات المقدار الجبري

$٢\,|$ ١ ، −١ ، −٥ ، ٦

٢ ، ٢ ، −٦

١ ، ١ ، −٣ ، ٠ ← الباقي

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢+س-٣)}{(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} (س^٢+س-٣) = ٤+٢-٣ = ٣$

(٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥س - ٤}{س - ٤}$

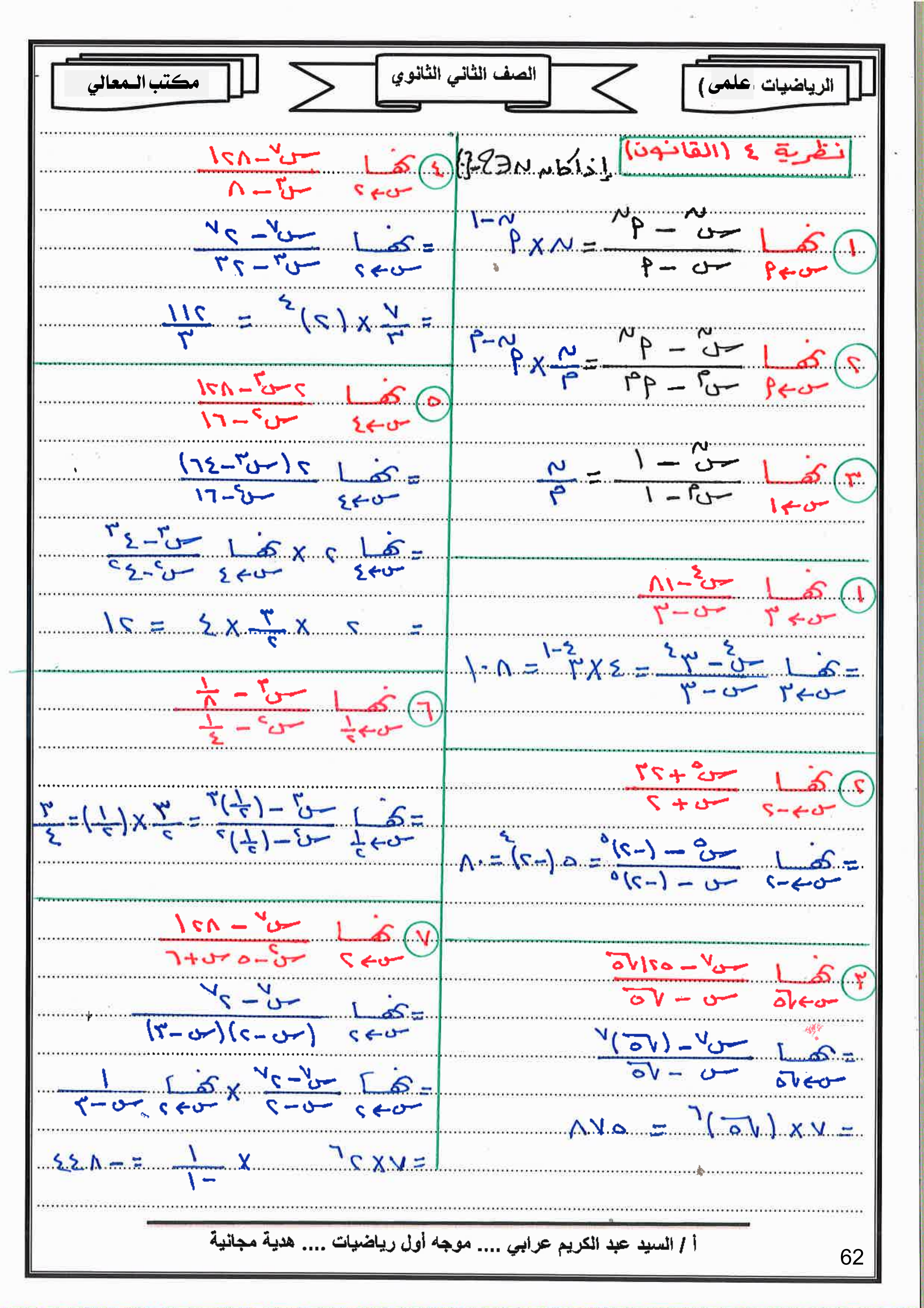
$٤\,|$ ١ ، ٠ ، −١٥ ، −٤

٤ ، ١٦ ، ٤

١ ، ٤ ، ١ ، ٠

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^٢+٤س+١)}{(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} (س^٢+٤س+١) = ٣٣$



نظرية ٤ (القانون)

إذا كانت $n \in \mathbb{R}-\{0\}$

١) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \times a^{n-1}$

٢) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} \times a^{n-m}$

٣) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}$

١) $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 3^4}{x - 3} = 4 \times 3^{4-1} = 108$

٢) $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{x^5 - (-2)^5}{x - (-2)} = 5(-2)^4 = 80$

٣) $\lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{x^7 - 125\sqrt{5}}{x - \sqrt{5}}$

$= \lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{x^7 - (\sqrt{5})^7}{x - \sqrt{5}}$

$= 7 \times (\sqrt{5})^6 = 875$

٤) $\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 128}{x^3 - 8}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x^3 - 2^3}$

$= \frac{7}{3} \times (2)^4 = \frac{112}{3}$

٥) $\lim_{x \to 4} \frac{2x^3 - 128}{x^2 - 16}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{2(x^3 - 64)}{x^2 - 16}$

$= 2 \times \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 4^3}{x^2 - 4^2}$

$= 2 \times \frac{3}{2} \times 4 = 12$

٦) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^3 - \frac{1}{8}}{x^2 - \frac{1}{4}}$

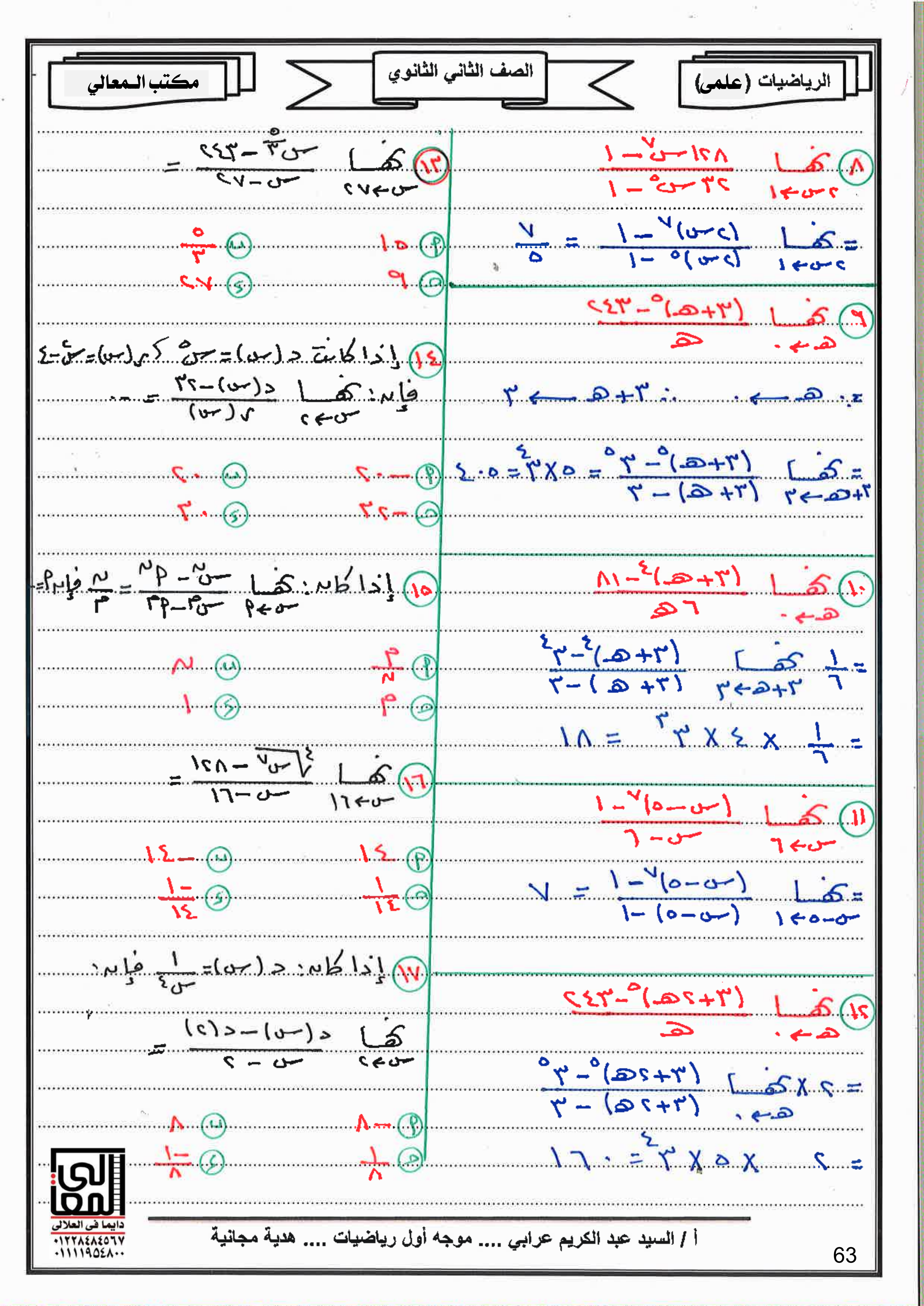
$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^3 - (\frac{1}{2})^3}{x^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} \times (\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

٧) $\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 128}{x^2 - 5x + 6}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{(x-2)(x-3)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x - 2} \times \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 3}$

$= 7 \times 2^6 \times \frac{1}{-1} = -448$



⑧ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$

$= \lim_{\frac{س}{٢} \to ١} \frac{(\frac{س}{٢})^{٧} - ١}{(\frac{س}{٢})^{٥} - ١} = \frac{٧}{٥}$

⑨ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣+هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

∵ هـ ← ٠ ∴ ٣ + هـ ← ٣

$= \lim_{٣+هـ \to ٣} \frac{(٣+هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+هـ) - ٣} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

⑩ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣+هـ)^{٤} - ٨١}{٦هـ}$

$= \frac{١}{٦} \lim_{٣+هـ \to ٣} \frac{(٣+هـ)^{٤} - ٣^{٤}}{(٣+هـ) - ٣}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤ \times ٣^{٣} = ١٨$

⑪ $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

$= \lim_{س-٥ \to ١} \frac{(س-٥)^{٧} - ١}{(س-٥) - ١} = ٧$

⑫ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

$= ٢ \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+٢هـ) - ٣}$

$= ٢ \times ٥ \times ٣^{٤} = ١٦٠$

⑬ $\lim_{س \to ٢٧} \frac{س^{\frac{٥}{٣}} - ٢٤٣}{س - ٢٧} = $

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$

(جـ) ٩ (د) ٢٧

⑭ إذا كانت د(س) = $س^{٥}$ ، ر(س) = $س^{٢} - ٤$

فإن: $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = ...$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠

(جـ) −٣٢ (د) ٣٠

⑮ إذا كان: $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{٣} - أ^{٣}} = \frac{ن}{٣}$ فإن أ =

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) ن

(جـ) م (د) ١

⑯ $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦} = $

(أ) ١٤ (ب) −١٤

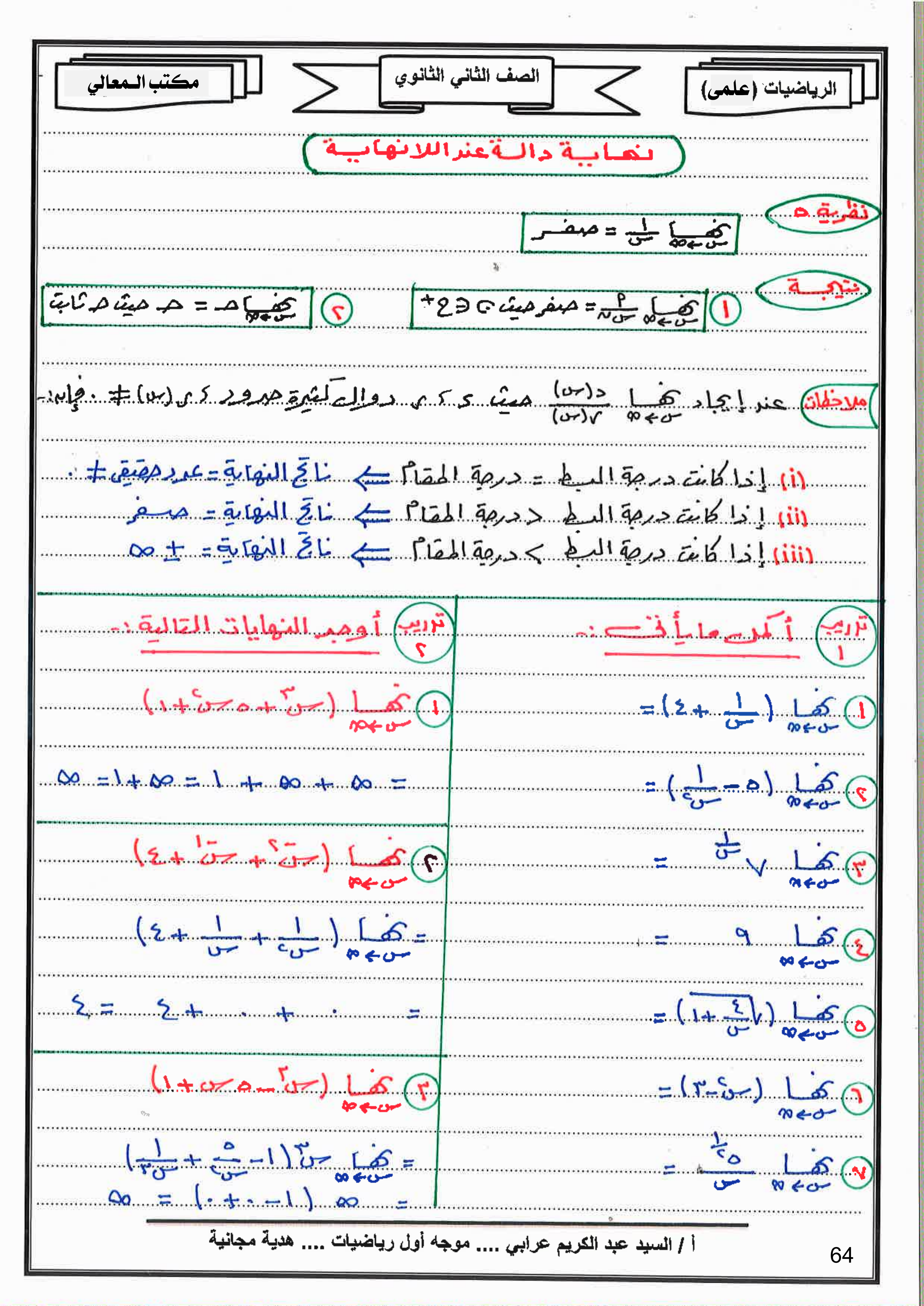
(جـ) $\frac{١}{١٤}$ (د) $\frac{-١}{١٤}$

⑰ إذا كان: د(س) = $\frac{١}{س^{٤}}$ فإن:

$\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = $

(أ) −٨ (ب) ٨

(جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{-١}{٨}$



نهاية دالة عند اللانهاية

نظرية

$$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = \text{صفر}$$

نتيجة

(1) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} =$ صفر حيث ن $\in$ ص$^{+}$

(2) $\lim_{س \to \infty} ح = ح$ حيث ح ثابت

ملاحظات

عند إيجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث د ، ر دوال كثيرة حدود ر(س) $\neq 0$ فإن:

(i) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = عدد حقيقي $\neq 0$

(ii) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = صفر

(iii) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = $\pm\infty$

تدريب 1: أكمل ما يأتي:

1) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{1}{س} + 4\right) =$

2) $\lim_{س \to \infty} \left(5 - \frac{1}{س^{2}}\right) =$

3) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{1}{س}} =$

4) $\lim_{س \to \infty} 9 =$

5) $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{\frac{4}{س} + 1}\right) =$

6) $\lim_{س \to \infty} \left(س^{2} - 3\right) =$

7) $\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{1}{5}}{س} =$

تدريب 2: أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{س \to \infty} \left(س^{3} + 5س^{2} + 1\right)$

$= \infty + \infty + 1 = \infty + 1 = \infty$

2) $\lim_{س \to \infty} \left(س^{-2} + س^{-1} + 4\right)$

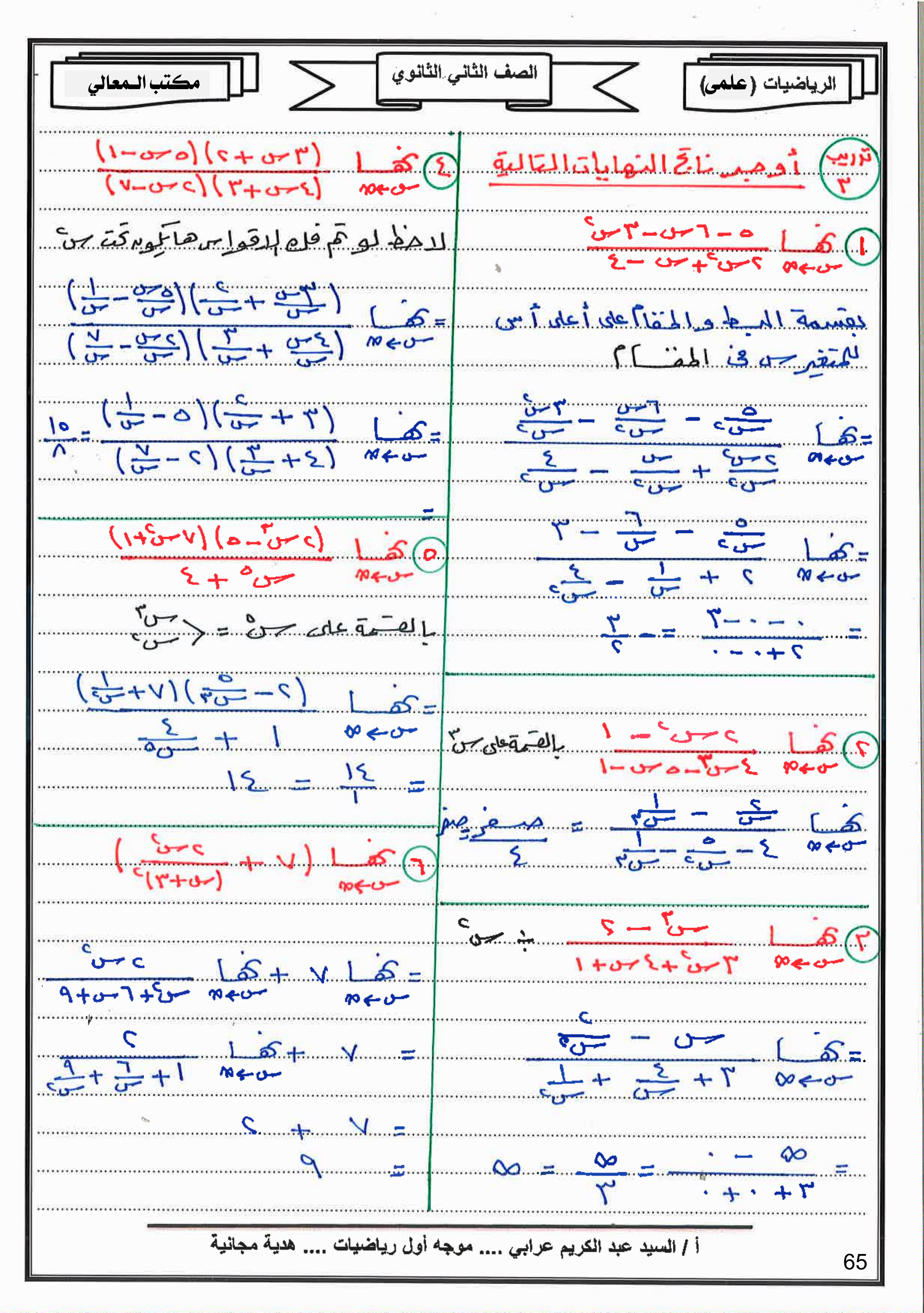
$= \lim_{س \to \infty} \left(\frac{1}{س^{2}} + \frac{1}{س} + 4\right)$

$= 0 + 0 + 4 = 4$

3) $\lim_{س \to \infty} \left(س^{3} - 5س^{2} + 1\right)$

$= \lim_{س \to \infty} س^{3}\left(1 - \frac{5}{س} + \frac{1}{س^{3}}\right)$

$= \infty\,(1 - 0 + 0) = \infty$



تدريب ٣ : أوجد ناتج النهايات التالية

(١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - ٦\text{س} - ٣\text{س}^٢}{٢\text{س}^٢ + \text{س} - ٤}$

بقسمة البسط والمقام على أعلى أس للمتغير س في المقام؟

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٥}{\text{س}^٢} - \frac{٦\text{س}}{\text{س}^٢} - \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٢}}{\frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢} + \frac{\text{س}}{\text{س}^٢} - \frac{٤}{\text{س}^٢}}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٥}{\text{س}^٢} - \frac{٦}{\text{س}} - ٣}{٢ + \frac{١}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}^٢}}$

$= \dfrac{٠ - ٠ - ٣}{٢ + ٠ - ٠} = -\dfrac{٣}{٢}$

(٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ - ١}{٤\text{س}^٣ - ٥\text{س} - ١}$ بالقسمة على $\text{س}^٣$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^٣}}{٤ - \frac{٥}{\text{س}^٢} - \frac{١}{\text{س}^٣}} = \dfrac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$

(٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٢}{٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١}$ ÷ $\text{س}^٢$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^٢}}{٣ + \frac{٤}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٢}}$

$= \dfrac{\infty - ٠}{٣ + ٠ + ٠} = \dfrac{\infty}{٣} = \infty$

(٤) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣\text{س} + ٢)(٥\text{س} - ١)}{(٤\text{س} + ٣)(٢\text{س} - ٧)}$

لاحظ لو تم فك الأقواس هاتكون تربيعية س²

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(\frac{٣\text{س}}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}})(\frac{٥\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}})}{(\frac{٤\text{س}}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}})(\frac{٢\text{س}}{\text{س}} - \frac{٧}{\text{س}})}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + \frac{٢}{\text{س}})(٥ - \frac{١}{\text{س}})}{(٤ + \frac{٣}{\text{س}})(٢ - \frac{٧}{\text{س}})} = \dfrac{١٥}{٨}$

(٥) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س}^٣ - ٥)(٧\text{س}^٢ + ١)}{\text{س}^٥ + ٤}$

بالقسمة على $\text{س}^٥ = \text{س}^٣ \times \text{س}^٢$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢ - \frac{٥}{\text{س}^٣})(٧ + \frac{١}{\text{س}^٢})}{١ + \frac{٤}{\text{س}^٥}}$

$= \dfrac{١٤}{١} = ١٤$

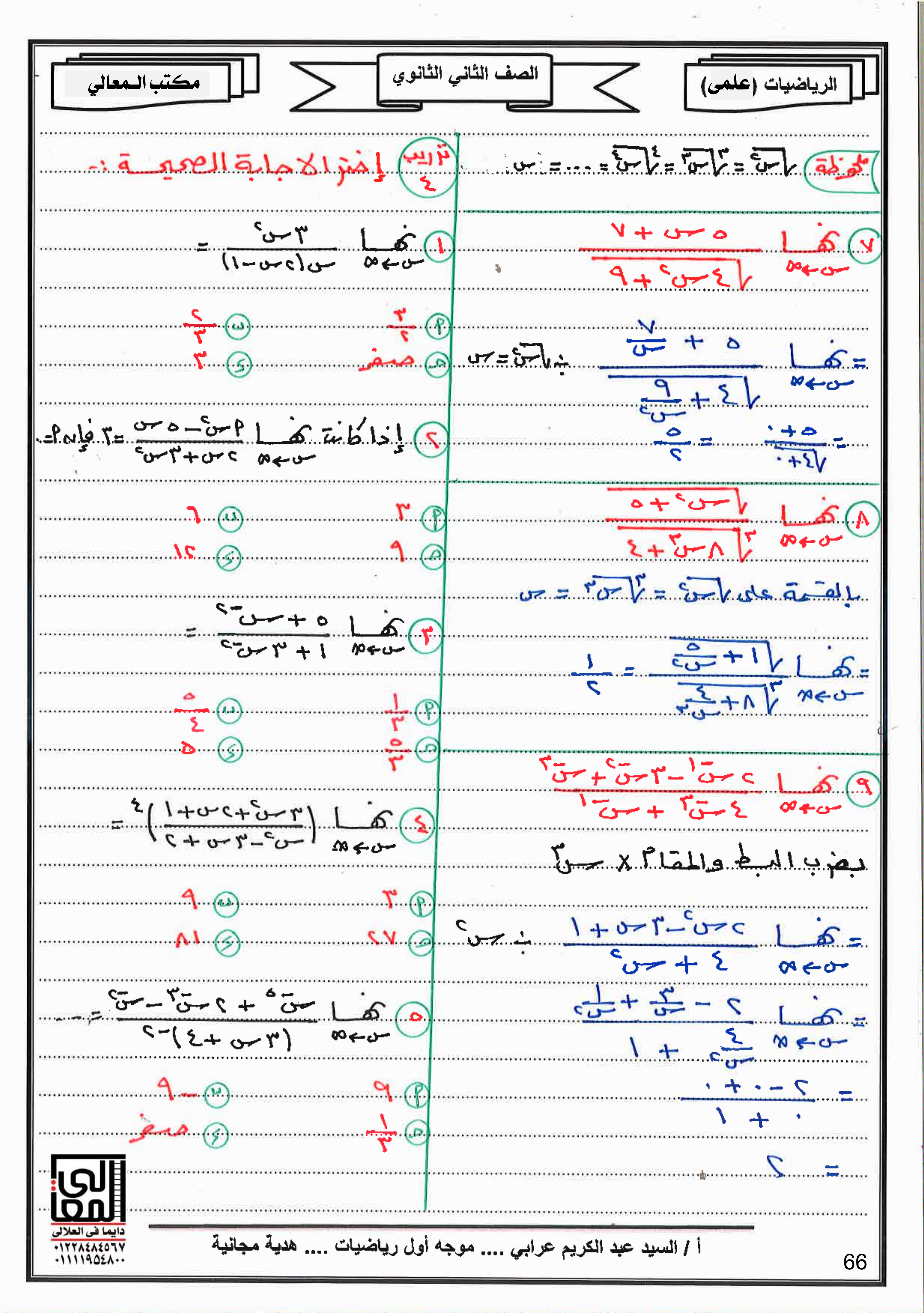
(٦) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢\text{س}^٢}{(\text{س}+٣)^٢} + ٧\right)$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ ٧ + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩}$

$= ٧ + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{١ + \frac{٦}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س}^٢}}$

$= ٧ + ٢$

$= ٩$



ملحوظة: $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4} = \dots = |س|$

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{5س + 7}{\sqrt{4س^2 + 9}}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{5 + \frac{7}{س}}{\sqrt{4 + \frac{9}{س^2}}}$ ∵ $\sqrt{س^2} = س$

$= \dfrac{5 + 0}{\sqrt{4 + 0}} = \dfrac{5}{2}$

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{س^2 + 5}}{\sqrt[3]{8س^3 + 4}}$

بالقسمة على $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = س$

$\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{5}{س^2}}}{\sqrt[3]{8 + \frac{4}{س^3}}} = \dfrac{1}{2}$

⑨ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{2س^{-1} - 3س^{-2} + س^{-3}}{4س^{-3} + س^{-1}}$

بضرب البسط والمقام × $س^3$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{2س^2 - 3س + 1}{4 + س^2}$ ÷ $س^2$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{2 - \frac{3}{س} + \frac{1}{س^2}}{\frac{4}{س^2} + 1}$

$= \dfrac{2 - 0 + 0}{0 + 1}$

$= 2$

تدريب ٤: إختر الإجابة الصحيحة:

① $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{3س^2}{س(2س - 1)} =$

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) صفر (د) 3

② إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{أس^2 - 5س}{2س + 3س^2} = 3$ فإن أ = ...

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 12

③ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{5 + س^{-2}}{1 + 3س^{-2}} =$

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (ج) $\frac{5}{3}$ (د) 5

④ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{3س^2 + 2س + 1}{س^2 - 3س + 2}\right)^4 =$

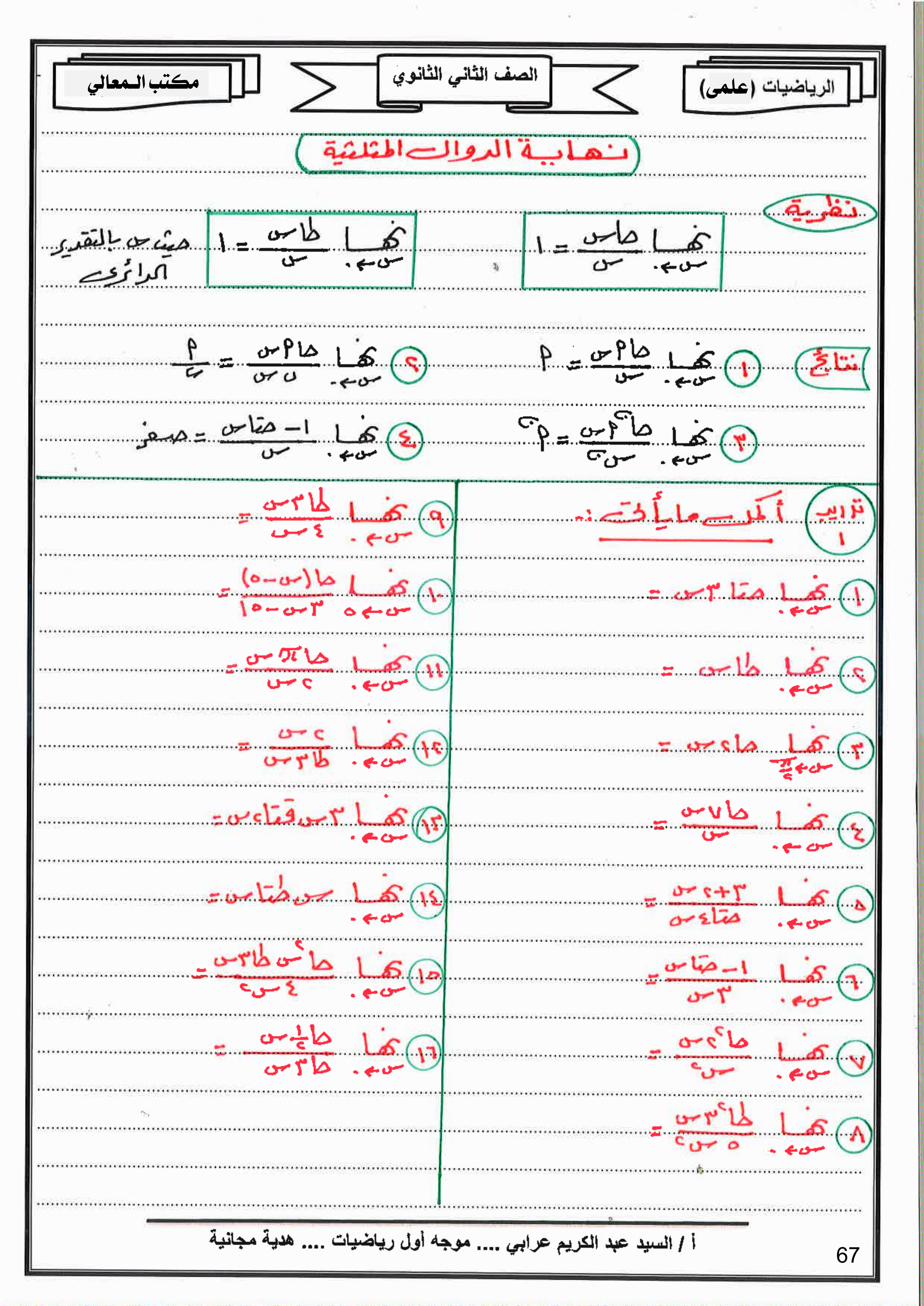
(أ) 3 (ب) 9 (ج) 27 (د) 81

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{-5} + 2س^{-3} - س^{-2}}{(3س + 4)^{-2}} =$ ....

(أ) 9 (ب) −9 (ج) $\frac{1}{3}$ (د) صفر

دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

أ / السيد عبد الكريم عرابي .... موجه أول رياضيات .... هدية مجانية



نهاية الدوال المثلثية

نظرية

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = 1$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = 1$ حيث س بالتقدير الدائري

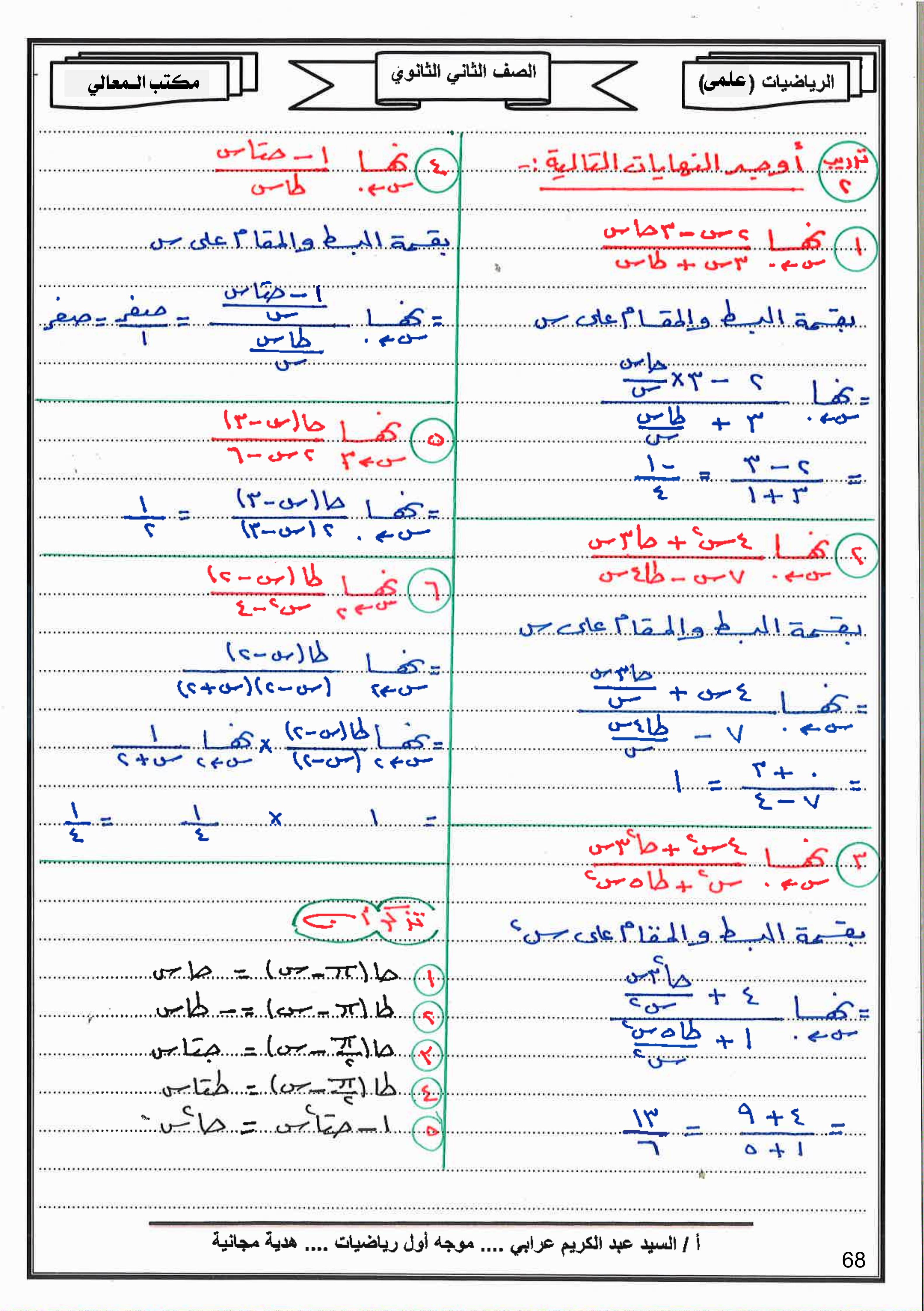
نتائج

1. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$
2. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$
3. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2 \text{أس}}{\text{س}^2} = \text{أ}^2$
4. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}} = \text{صفر}$

تدريب ١

أكمل ما يأتي:

1. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \text{جتا ٣س} =$
2. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \text{ظاس} =$
3. $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}} \text{جا ٤س} =$
4. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٧س}}{\text{س}} =$
5. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{3 + \text{٢س}}{\text{جتا ٤س}} =$
6. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{٣س}} =$
7. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2} =$
8. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^2 \text{٣س}}{\text{٥س}^2} =$
9. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا ٣س}}{\text{٤س}} =$
10. $\underset{س \to 5}{\text{نها}} \frac{\text{ظا(س} - 5)}{\text{٣س} - 15} =$
11. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \pi \text{س}}{\text{٢س}} =$
12. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{٢س}}{\text{ظا ٣س}} =$
13. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \text{٣س قتا ٤س} =$
14. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \text{س ظتاس} =$
15. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2 \text{س ظا ٣س}}{\text{٤س}^2} =$
16. $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } \frac{1}{2} \text{س}}{\text{ظا ٣س}} =$



تدريب ٢ أوجد النهايات التالية :-

(١) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{٢س} - \text{٣جاس}}{\text{٣س} + \text{طاس}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2 - 3\times\dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}}{3 + \dfrac{\text{طاس}}{\text{س}}} = \dfrac{2-3}{3+1} = \dfrac{-1}{4}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{٤س}^2 + \text{جا٣س}}{\text{٧س} - \text{طا٤س}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{٤س} + \dfrac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}{7 - \dfrac{\text{طا٤س}}{\text{س}}} = \dfrac{0+3}{7-4} = 1$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{٤س}^2 + \text{جا}^2\text{٣س}}{\text{س}^2 + \text{طا٥س}^2}$

بقسمة البسط والمقام على س^2

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{4 + \dfrac{\text{جا}^2\text{٣س}}{\text{س}^2}}{\dfrac{\text{طا٥س}^2}{\text{س}^2} + 1} = \dfrac{4+9}{5+1} = \dfrac{13}{6}$

(٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 - \text{جتاس}}{\text{طاس}}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\dfrac{1-\text{جتاس}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{طاس}}{\text{س}}} = \dfrac{\text{صفر}}{1} = \text{صفر}$

(٥) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{جا(س}-3)}{\text{٢س} - 6}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{جا(س}-3)}{2(\text{س}-3)} = \dfrac{1}{2}$

(٦) $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{طا(س}-2)}{\text{س}^2 - 4}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{طا(س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{طا(س}-2)}{(\text{س}-2)} \times \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{1}{\text{س}+2}$

$= 1 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

تذكر أن

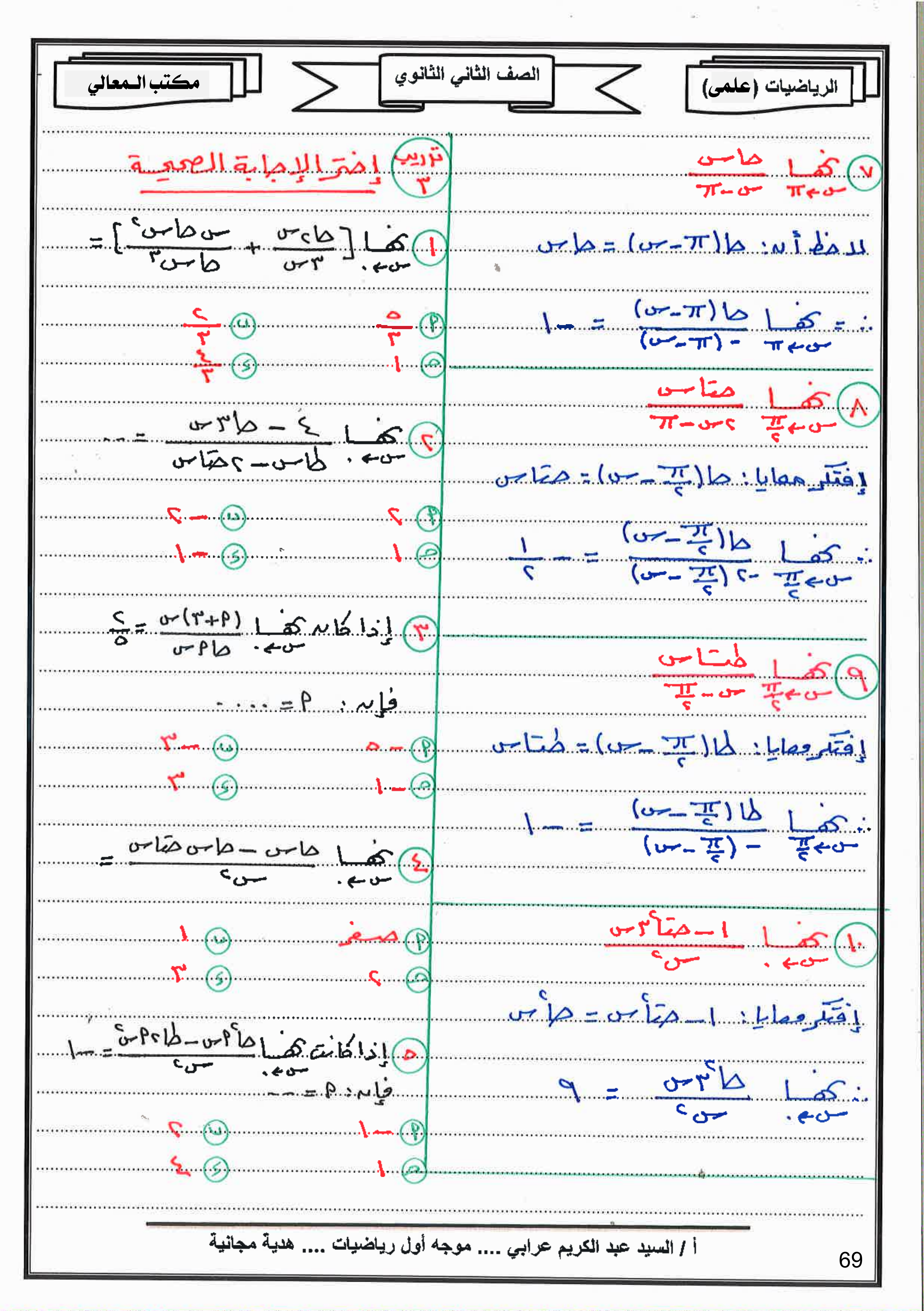
(١) $\text{جا}(\pi - \text{س}) = \text{جاس}$

(٢) $\text{طا}(\pi - \text{س}) = -\text{طاس}$

(٣) $\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س}) = \text{جتاس}$

(٤) $\text{طا}(\frac{\pi}{2} - \text{س}) = \text{ظتاس}$

(٥) $1 - \text{جتا}^2\text{س} = \text{جا}^2\text{س}$



٧) $\lim\limits_{س \to ط} \dfrac{\text{جا} س}{س - ط}$

نلاحظ أن: $\text{جا}(ط - س) = \text{جا} س$

$\therefore \lim\limits_{س \to ط} \dfrac{\text{جا}(ط - س)}{-(ط - س)} = -١$

٨) $\lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \dfrac{\text{جتا} س}{٢س - ط}$

إفتكر مهايا: $\text{جا}(\frac{ط}{٢} - س) = \text{جتا} س$

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \dfrac{\text{جا}(\frac{ط}{٢} - س)}{-٢(\frac{ط}{٢} - س)} = -\dfrac{١}{٢}$

٩) $\lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \dfrac{\text{ظتا} س}{س - \frac{ط}{٢}}$

إفتكر وصايا: $\text{ظا}(\frac{ط}{٢} - س) = \text{ظتا} س$

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \dfrac{\text{ظا}(\frac{ط}{٢} - س)}{-(\frac{ط}{٢} - س)} = -١$

١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢ ٣س}{س^٢}$

إفتكر وصايا: $١ - \text{جتا}^٢ س = \text{جا}^٢ س$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا}^٢ ٣س}{س^٢} = ٩$

تدريب ٣ إختر الإجابة الصحيحة

١) $\lim\limits_{س \to ٠} \left[\dfrac{\text{جا} ٢س}{٣س} + \dfrac{س \,\text{جا}^٢ س}{\text{ظا}^٣ س}\right] = $

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٤ - \text{ظا} ٣س}{\text{ظا} س - ٢\,\text{جتا} س} = ...$

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ١ (د) −١

٣) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(أ + ٣)س}{\text{ظا} أس} = \dfrac{٢}{٥}$

فإن: أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (ج) −١ (د) ٣

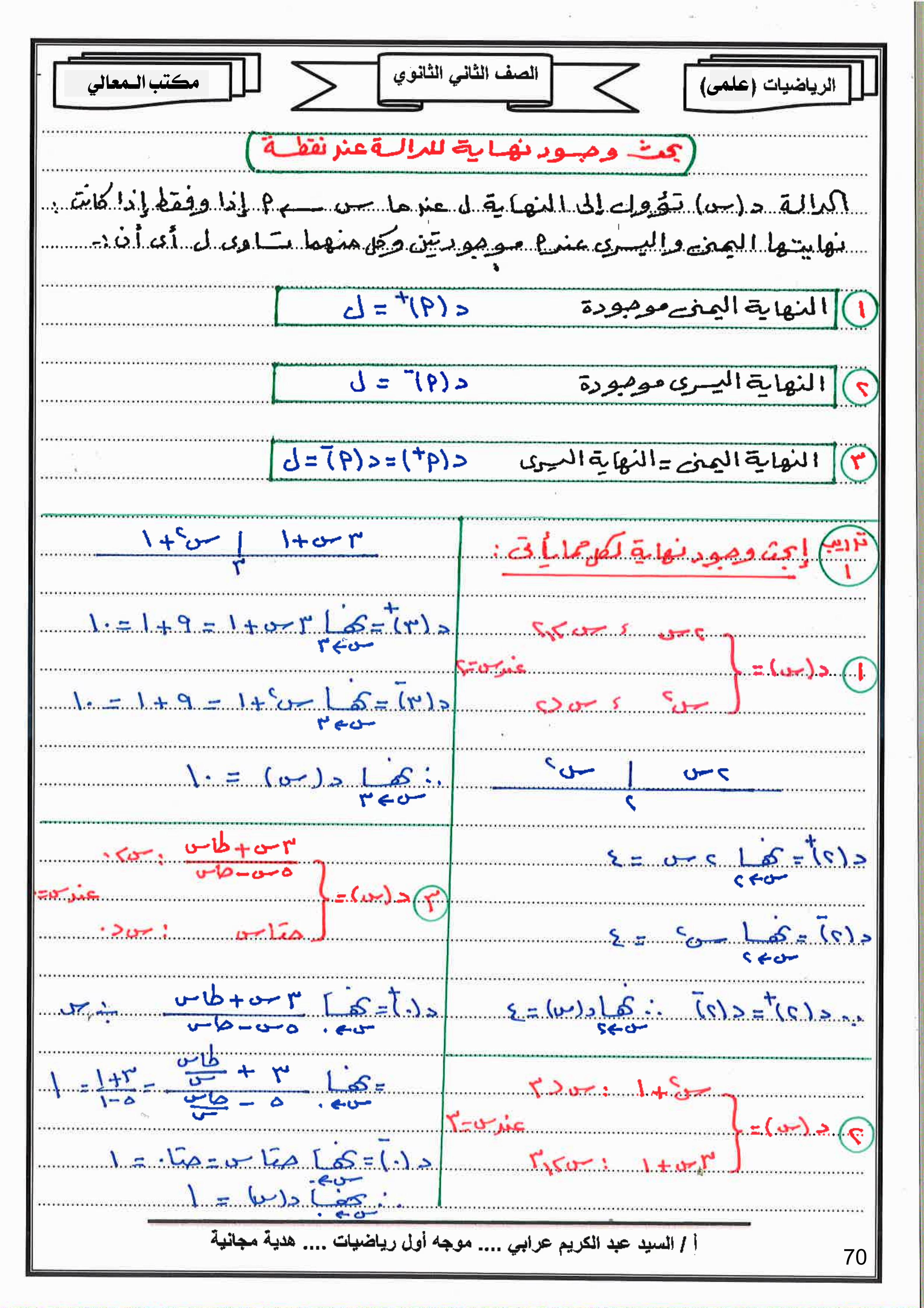
٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا} س - \text{ظا} س \,\text{جتا} س}{س^٢} = $

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٥) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا}^٢ أس - \text{ظا} ٢أس^٢}{س^٢} = -١$

فإن: أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٤



بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

الدالة د(س) تؤول إلى النهاية ل عندما س ← م إذا وفقط إذا كانت نهايتها اليمنى واليسرى عند م موجودتين وكل منهما تساوي ل أي أن:

١) النهاية اليمنى موجودة: $د(م^{+}) = ل$

٢) النهاية اليسرى موجودة: $د(م^{-}) = ل$

٣) النهاية اليمنى = النهاية اليسرى: $د(م^{+}) = د(م^{-}) = ل$

تدريب ١: ابحث وجود نهاية لكل مما يأتي:

١) د(س) = { ٢س ، س > ٢ ؛ س^{٢} ، س < ٢ } عند س = ٢

س^{٢}	٢س
← ٢	٢ →

$د(٢^{+}) = نها_{س \to ٢}$ ٢س = ٤

$د(٢^{-}) = نها_{س \to ٢}$ س^{٢} = ٤

∵ $د(٢^{+}) = د(٢^{-})$ ∴ $نها_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

٢) د(س) = { س^{٢}+١ ، س < ٣ ؛ ٣س+١ ، س ≥ ٣ } عند س = ٣

س^{٢}+١	٣س+١
← ٣	٣ →

$د(٣^{+}) = نها_{س \to ٣}$ ٣س+١ = ٩+١ = ١٠

$د(٣^{-}) = نها_{س \to ٣}$ س^{٢}+١ = ٩+١ = ١٠

∴ $نها_{س \to ٣}$ د(س) = ١٠

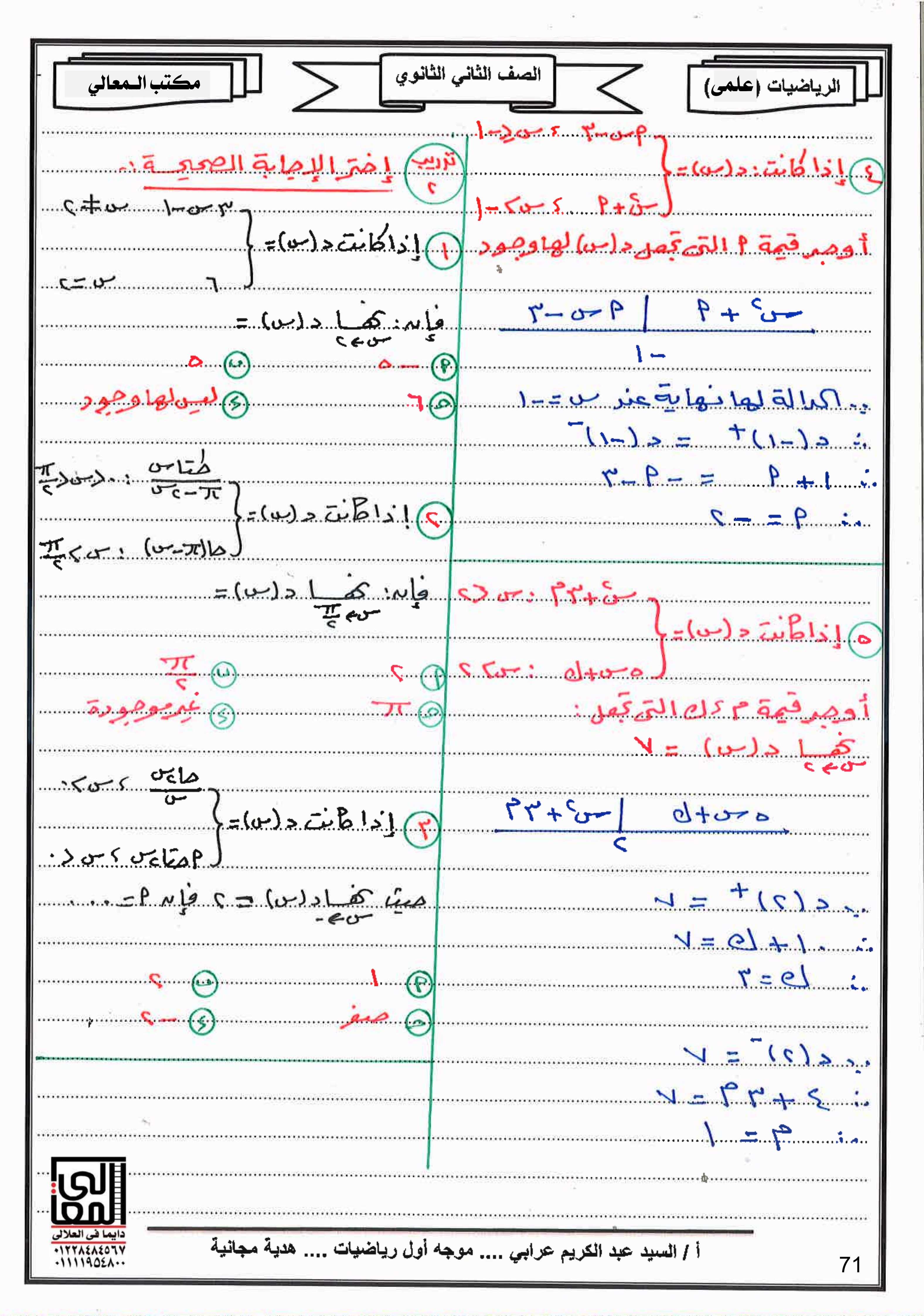
٣) د(س) = { $\frac{٣س + طاس}{٥س - طاس}$ ، س > ٠ ؛ جتاس ، س < ٠ } عند س = ٠

$د(٠^{+}) = نها_{س \to ٠} \frac{٣س + طاس}{٥س - طاس}$ بقسمة البسط والمقام على س

$= نها_{س \to ٠} \frac{٣ + \frac{طاس}{س}}{٥ - \frac{طاس}{س}} = \frac{٣+١}{٥-١} = ١$

$د(٠^{-}) = نها_{س \to ٠}$ جتاس = جتا٠ = ١

∴ $نها_{س \to ٠}$ د(س) = ١



٤) إذا كانت: د(س) = { أس − ٣ ، س ≤ −١ ؛ س² + أ ، س > −١ }

أوجد قيمة أ التي تجعل د(س) لها وجود

س² + أ	أ س − ٣

−١

∴ الدالة لها نهاية عند س = −١

∴ د(−١)⁺ = د(−١)⁻

∴ ١ + أ = −أ − ٣

∴ أ = −٢

٥) إذا كانت د(س) = { س² + ٣م ، س < ٢ ؛ ٥س + ل ، س > ٢ }

أوجد قيمة م ، ل التي تجعل: $نهـا_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

س² + ٣م	٥س + ل

٢

∵ د(٢)⁺ = ٧

∴ ١٠ + ل = ٧

∴ ل = ٣

∵ د(٢)⁻ = ٧

∴ ٤ + ٣م = ٧

∴ م = ١

تدريب ٢ : إختر الإجابة الصحيحة :

١) إذا كانت د(س) = { ٣س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ }

فإن: $نهـا_{س \to ٢}$ د(س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥

(ج) ٦ (د) ليس لها وجود

٢) إذا كانت د(س) = { ظتا س / (π − ٢س) ، ٠ < س < π/٢ ؛ ظا(π − س) ، س > π/٢ }

فإن: $نهـا_{س \to \frac{\pi}{2}}$ د(س) = ...

(أ) ٢ (ب) π/٢

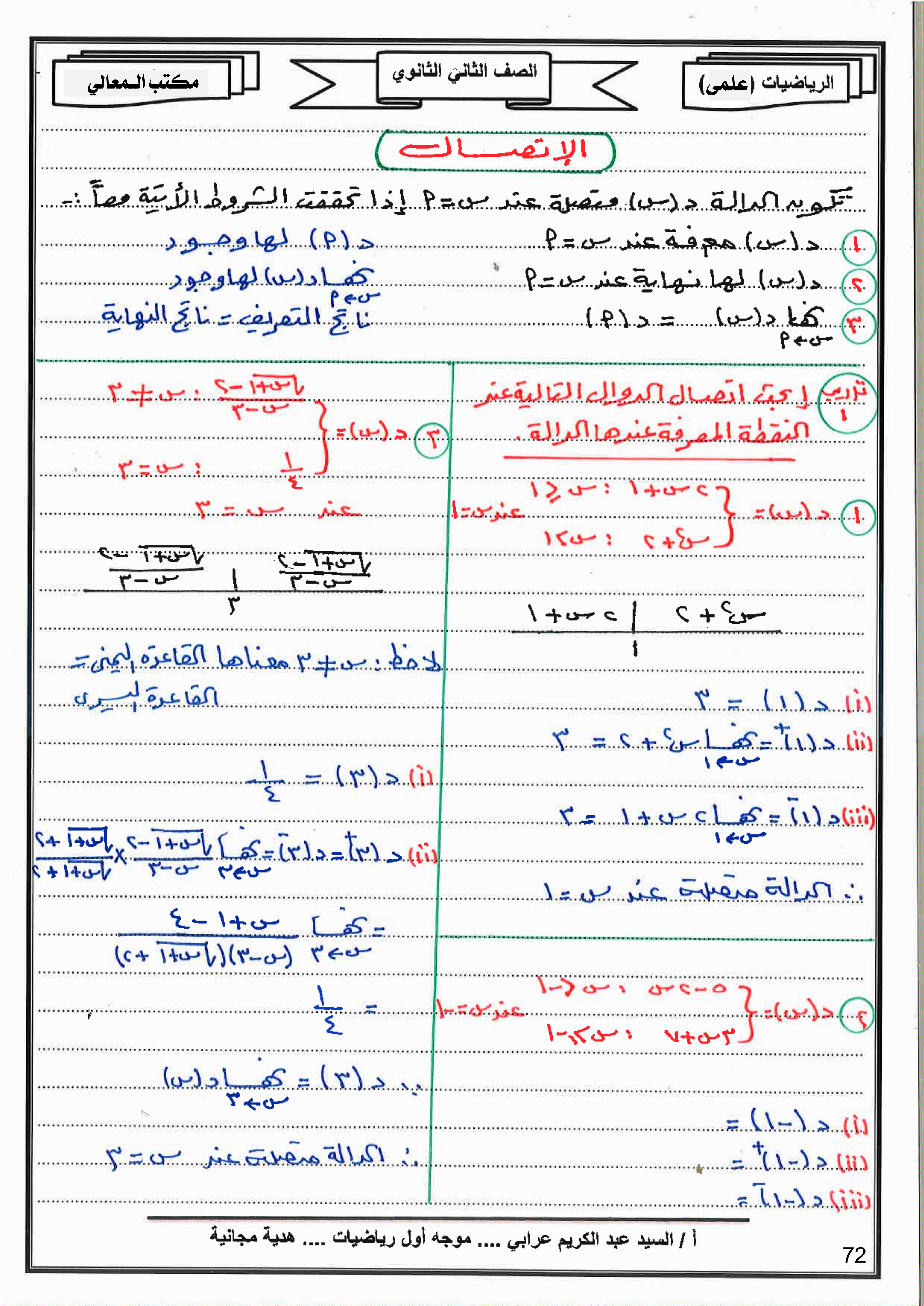
(ج) π (د) غير موجودة

٣) إذا كانت د(س) = { جا٢س / س ، س < ٠ ؛ أ جتا س ، س ≥ ٠ }

حيث $نهـا_{س \to ٠}$ د(س) = ٢ فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) صفر (د) −٢



الإتصال

تكون الدالة د(س) متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معاً :-

1. د(س) معرفة عند س = أ .... د(أ) لها وجود
2. د(س) لها نهاية عند س = أ .... $\lim_{س \to أ}$ د(س) لها وجود
3. $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ) .... ناتج التعريف = ناتج النهاية

تدريب 1

ابحث اتصال الدوال التالية عند النقطة المعرفة عندها الدالة.

1) $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & : س \le ١ \\ س^٢ + ٢ & : س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(i) د(١) = ٣

(ii) $د(١)^+ = \lim_{س \to ١} س^٢ + ٢ = ٣$

(iii) $د(١)^- = \lim_{س \to ١} ٢س + ١ = ٣$

∴ الدالة متصلة عند س = ١

2) $د(س) = \begin{cases} ٥ - ٢س & ، س < -١ \\ ٣س + ٧ & : س \ge -١ \end{cases}$ عند س = -١

(i) د(-١) =

(ii) $د(-١)^+ =$

(iii) $د(-١)^- =$

3) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} & : س \ne ٣ \\ \dfrac{١}{٤} & : س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

لاحظ: س ≠ ٣ معناها القاعدة اليمنى = القاعدة اليسرى

(i) $د(٣) = \dfrac{١}{٤}$

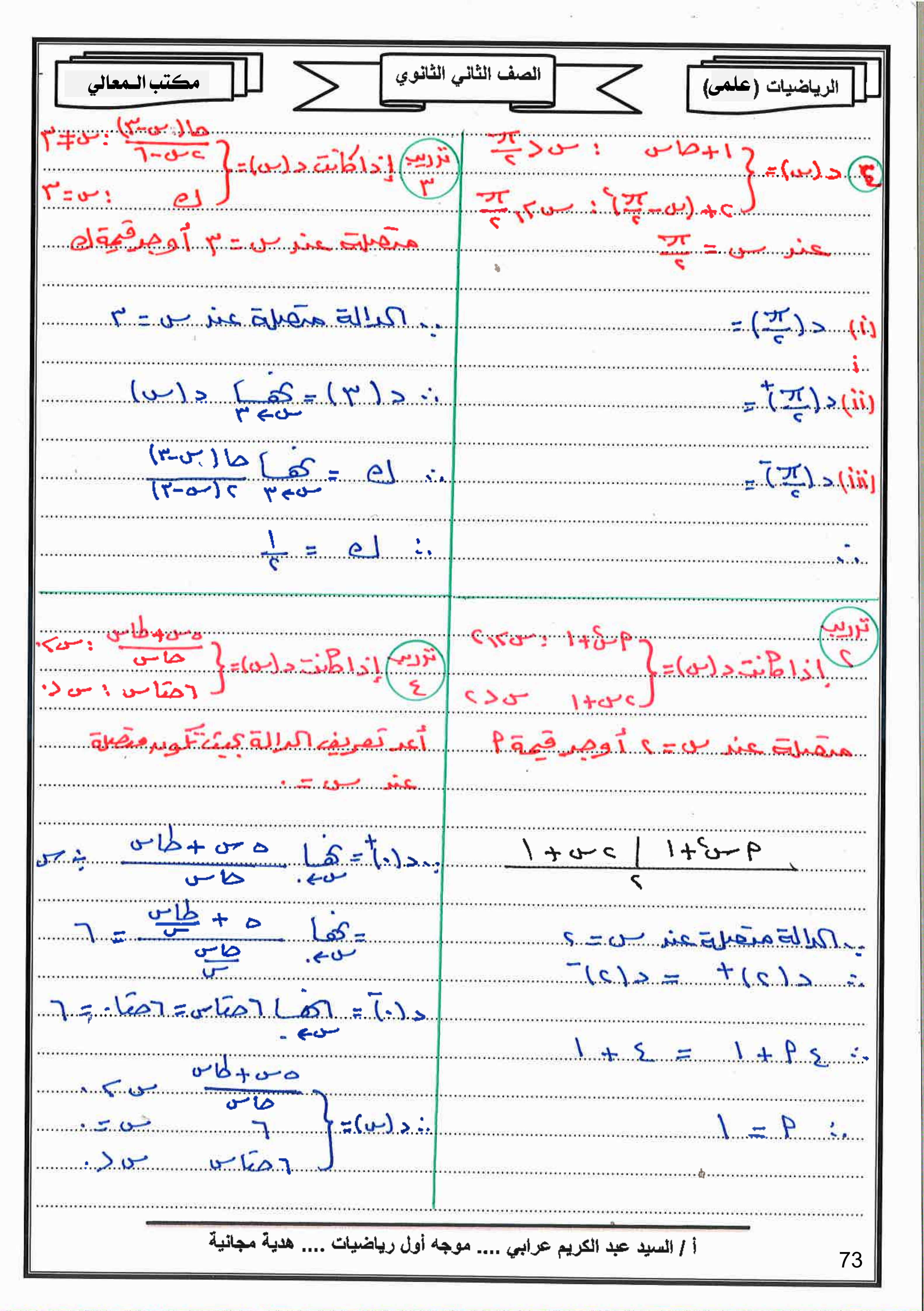
(ii) $د(٣)^+ = د(٣)^- = \lim_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} \times \dfrac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \dfrac{س + ١ - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \dfrac{١}{٤}$

∴ $د(٣) = \lim_{س \to ٣} د(س)$

∴ الدالة متصلة عند س = ٣



④ $د(س) = \begin{cases} ١ + طاس & : س < \frac{\pi}{٢} \\ جـ + (س - \frac{\pi}{٢})^{٢} & : س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

عند $س = \frac{\pi}{٢}$

(i) $د(\frac{\pi}{٢}) =$

(ii) $د(\frac{\pi}{٢})^{+} =$

(iii) $د(\frac{\pi}{٢})^{-} =$

∴

تدريب ٣: إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{حا(س-٣)}{٢س-٦} & : س \neq ٣ \\ ل & : س = ٣ \end{cases}$

متصلة عند س = ٣ أوجد قيمة ل

∵ الدالة متصلة عند $س = ٣$

∴ $د(٣) = \underset{س \to ٣}{نهـا}\ د(س)$

∴ $ل = \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{حا(س-٣)}{٢(س-٣)}$

∴ $ل = \frac{١}{٢}$

تدريب ٢: إذا كانت $د(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ١ & : س \geq ٢ \\ ٢س + ١ & : س < ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة أ

$أس^{٢}+١ \quad | \quad ٢س+١$ (عند ٢)

∵ الدالة متصلة عند $س = ٢$

∴ $د(٢)^{+} = د(٢)^{-}$

∴ $٤أ + ١ = ٤ + ١$

∴ $أ = ١$

تدريب ٤: إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{٥س + طاس}{حاس} & : س > ٠ \\ ٦ حتاس & : س < ٠ \end{cases}$

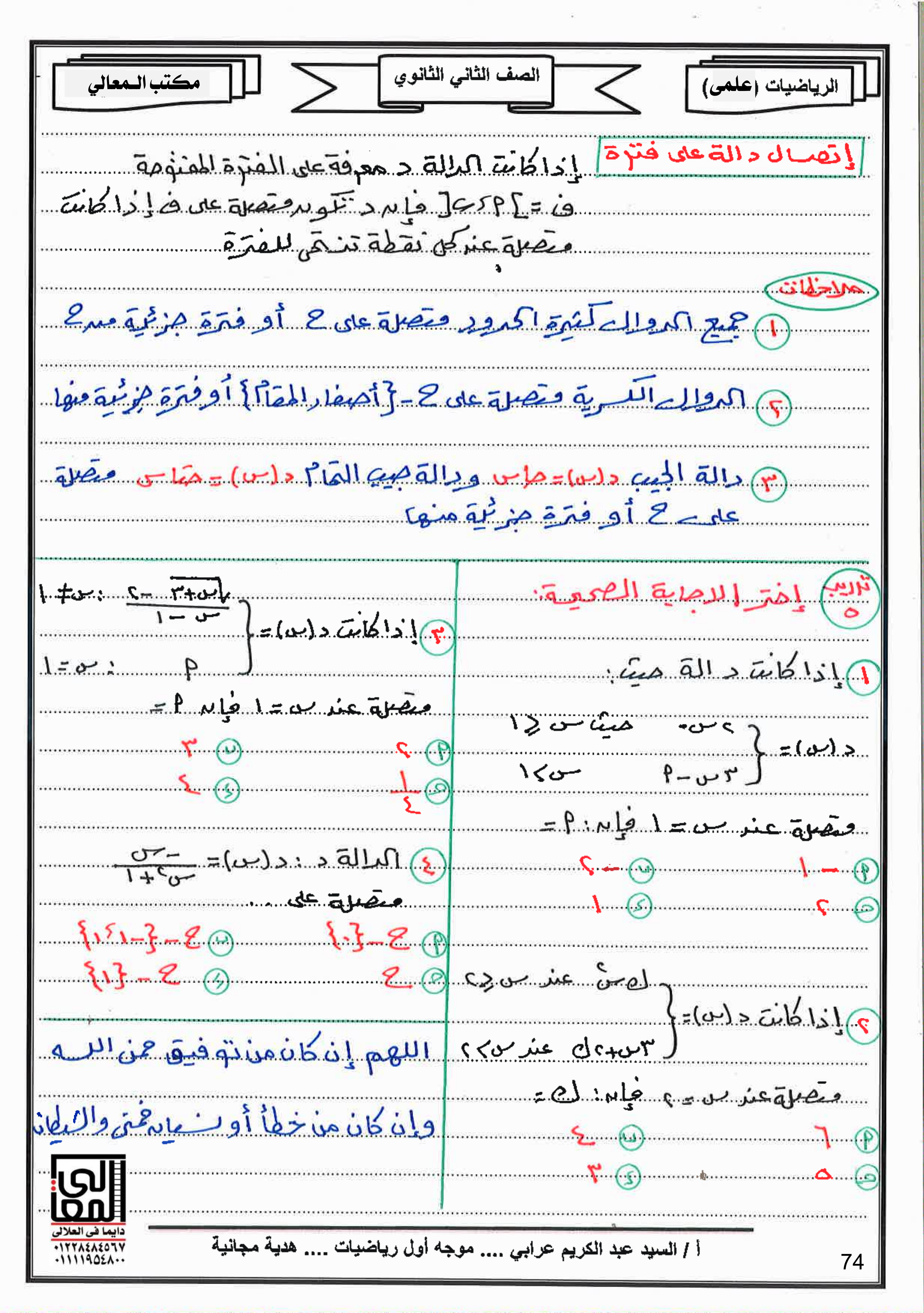
أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند س = ٠

∵ $د(٠)^{+} = \underset{س \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{٥س + طاس}{حاس}$

$= \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٥ + \frac{طاس}{س}}{\frac{حاس}{س}} = ٦$

$د(٠)^{-} = \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} ٦ حتاس = ٦ حتا ٠ = ٦$

∴ $د(س) = \begin{cases} \frac{٥س + طاس}{حاس} & : س > ٠ \\ ٦ & : س = ٠ \\ ٦ حتاس & : س < ٠ \end{cases}$



إتصال دالة على فترة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ، ب[فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي للفترة

ملاحظات:

١) جميع الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو فترة جزئية منها

٢) الدوال الكسرية متصلة على ح - {أصفار المقام} أو فترة جزئية منها

٣) دالة الجيب د(س) = جا س ودالة جيب التمام د(س) = جتا س متصلة على ح أو فترة جزئية منها

تدريب ٥ إختر الإجابة الصحيحة:

١) إذا كانت د دالة حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & حيث\ س \leq ١ \\ ٣س - أ & س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فإن: أ =

(أ) -١ (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ١

٢) إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} ك س^٢ & عند\ س \leq ٢ \\ ٣س + ٢ك & عند\ س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فإن: ك =

(أ) ٦ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٣

٣) إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} & : س \neq ١ \\ أ & : س = ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

٤) الدالة د : د(س) = $\frac{-س}{س^٢ + ١}$ متصلة على ......

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {-١، ١} (ج) ح (د) ح - {١}

اللهم إن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان